1.9 (a) En soustrayant les équations $\begin{cases} a = b\,q \ + r \\ a = b\,q' + r' \end{cases}$

on obtient $0 = b\,q - b\,q' + r - r'$.

D'où $\quad r - r' = b\,q' - b\,q = b\,(q' - q)$.
$r - r'$ est donc un multiple de b.

(b) $\begin{cases} 0 \leqslant r \ < b \\ 0 \leqslant r' < b \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant \quad r < b \\ 0 \geqslant -r' > -b \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \quad \leqslant \quad r < b \\ -b < -r' \leqslant 0 \end{cases}$

L'addition des inégalités du dernier système donne $-b < r - r' < b$.

(c) La propriété (a) garantit l'existence d'un entier n tel que $r - r' = b\,n$.

La propriété (b), à savoir $-b < r - r' < b$, donne $-b < b\,n < b$.

Puisque l'on suppose $b \neq 0$, on peut diviser cette dernière inégalité par b pour obtenir $-1 < n < 1$.

Attendu que $n \in \mathbb{Z}$, on doit avoir $n = 0$.
Il s'ensuit $r - r' = b \cdot 0 = 0$, c'est-à-dire $r = r'$.

Comme $r = r'$, on a $\begin{cases} a = b\,q \ + r \\ a = b\,q' + r' \end{cases} \iff \begin{cases} a = b\,q \\ a = b\,q' \end{cases}$

En soustrayant ces équations, on trouve $0 = b\,q - b\,q' = b\,(q - q')$.
Puisque $b \neq 0$, on conclut $q - q' = 0$, en d'autres termes $q = q'$.