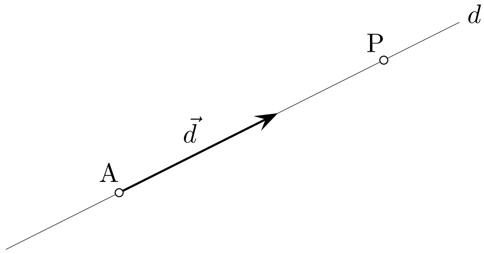
1 La droite dans le plan

Dans un repère du plan, on considère un point $\mathrm{A}(a_1\,;a_2)$ et un vecteur non nul $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$. On appelle d la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{d}$.



Équation paramétrique

Pour tout point $\mathrm{P}(x\,;y)$ du plan, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Le point P appartient à la droite d.
2) Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires.
3) Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda\,\vec{d}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,d_1 \\ \lambda\,d_2 \end{pmatrix}$.
4) $\boxed{\begin{cases} x = a_1 + \lambda\,d_1 \\ y = a_2 + \lambda\,d_2 \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}}$

   Cette formule constitue l'**équation paramétrique** de la droite d.

Équation cartésienne

Pour tout point $\mathrm{P}(x\,;y)$ du plan, les conditions suivantes sont équivalentes :

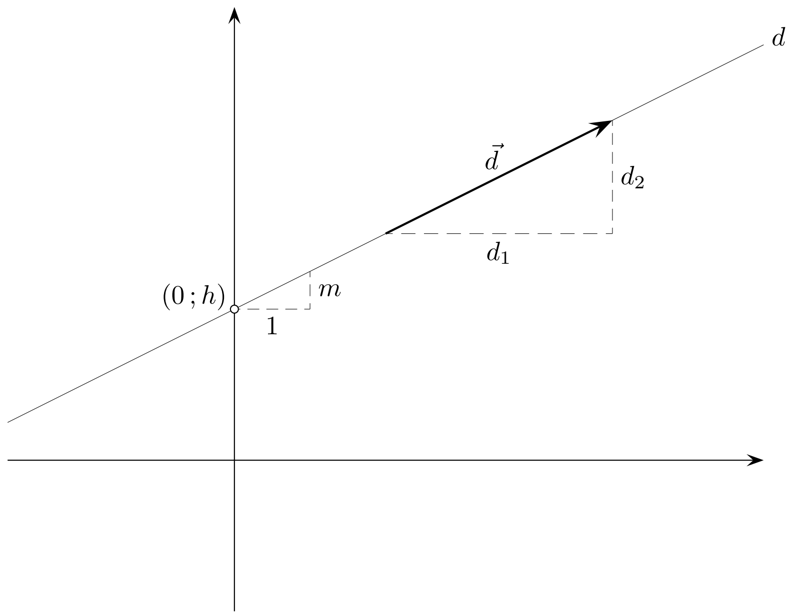
1) Le point P appartient à la droite d.
2) Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires.
3) $\begin{vmatrix} x - a_1 & d_1 \\ y - a_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire $d_2\,(x - a_1) = d_1\,(y - a_2)$.
4) Avec $a = d_2$, $b = -d_1$ et $c = d_1\,a_2 - d_2\,a_1$: $\boxed{a\,x + b\,y + c = 0}$

   Cette expression s'appelle l'**équation cartésienne** de la droite d.

Autre forme de l'équation cartésienne

Supposons $d_1 \neq 0$, en d'autres termes, que la droite d n'est pas verticale.
En divisant par d_1 l'équation $d_2\,(x - a_1) = d_1\,(y - a_2)$, on obtient :
$y = \underbrace{\frac{d_2}{d_1}}_{m}\,x + \underbrace{a_2 - \frac{d_2}{d_1}\,a_1}_{h}$ c'est-à-dire $\boxed{y = m\,x + h}$

Le nombre $m = \frac{d_2}{d_1} = -\frac{a}{b}$ s'appelle la **pente** de la droite d.
Lorsque $x = 0$, l'équation $y = m\,x + h$ donne $y = h$. C'est pourquoi le nombre h s'appelle l'**ordonnée à l'origine** de la droite d.



1.1 Déterminer l'équation paramétrique et l'équation cartésienne de la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{d}$.

1) $\mathrm{A}(-2\,;3)$ $\qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

2) $\mathrm{A}(2\,;5)$ $\qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

3) $\mathrm{A}(2\,;5)$ $\qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.2 Déterminer un vecteur directeur, la pente et l'ordonnée à l'origine des droites suivantes :

1) $5\,x + 7\,y - 21 = 0$ $\qquad$ 2) $5\,x - 8\,y + 56 = 0$ $\qquad$ 3) $\begin{cases} x = -6 + 3\,\lambda \\ y = 7 - 7\,\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

1.3 Déterminer une équation paramétrique, une équation cartésienne, la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite donnée par :

1) un point $\mathrm{A}(-5\,;4)$ et le vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$;
2) un point $\mathrm{A}(3\,;-7)$ et la pente $m = -\frac{1}{5}$;
3) les deux points $\mathrm{A}(7\,;2)$ et $\mathrm{B}(-5\,;8)$;
4) un point $\mathrm{A}(-7\,;8)$ et sachant qu'elle est parallèle à l'axe des abscisses ;
5) un point $\mathrm{A}(4\,;5)$ et sachant qu'elle est parallèle à l'axe des ordonnées ;
6) l'origine et sachant qu'elle est parallèle à la droite $3\,x + 5\,y - 8 = 0$.

1.4 Les points A$(-4\,;3)$, B$(2\,;5)$ et C$(8\,;-4)$ appartiennent-ils

1) à la droite d_1 d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 6 + 2\,\lambda \\ y = -1 - 3\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$?

2) à la droite d_2 d'équation cartésienne $x - 3\,y + 13 = 0$?

1.5 Représenter graphiquement les droites suivantes :

1) $2\,x - 3\,y + 6 = 0$
2) $2\,x + 5 = 0$
3) $5\,x + 3\,y - 15 = 0$
4) $-3\,y + 9 = 0$
5) $y - 3 = 2\,(x - 4)$
6) $2\,x = 0$
7) $4\,(x + 2) = 5\,(y - 3)$
8) $-5\,y = 0$

1.6 On donne la droite d'équation cartésienne $-3\,x + 2\,y - 6 = 0$. Calculer les coordonnées du point de cette droite :

1) d'abscisse 3 ;
2) d'ordonnée -4 ;
3) dont les deux coordonnées sont égales ;
4) situé sur l'axe Ox ;
5) situé sur l'axe Oy ;
6) situé sur la droite d'équation cartésienne $5\,x - 7\,y + 4 = 0$.

1.7 Déterminer l'intersection des paires de droites :

1) $4\,x - 3\,y = 6$	et	$6\,x + y - 20 = 0$
2) $2\,x - 9\,y - 8 = 0$	et	$\begin{cases} x = 16 - 4\,\lambda \\ y = -6 + 2\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
3) $\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -5 + 2\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$	et	$\begin{cases} x = 5 + 3\,\mu \\ y = 5 + 2\,\mu \end{cases}$, $\mu \in \mathbb{R}$
4) $4\,(x + 3) = 3\,(6 - y)$	et	$3\,x + 2\,y = 4$
5) $4\,x - 6\,y = 3$	et	$-2\,x + 3\,y - 5 = 0$
6) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$	et	$x + y - 3 = 0$

1.8 Démontrer que les quatre droites (a) : $2\,x + y = 3$, (b) : $x = 3\,y - 1$, (c) : $3\,x + 5\,y - 7 = 0$ et (d) : $4\,x - 5\,y = 1$ sont concourantes.

1.9 Déterminer les coordonnées des sommets du triangle ABC dont les côtés sont situés sur les droites d'équations (a) : $4\,x + 3\,y - 5 = 0$, (b) : $-x + 3\,y - 10 = 0$ et (c) : $x = 2$.

1.10 Soient les points A$(0\,;1)$, B$(0\,;6)$, C$(0\,;5)$, D$(\frac{13}{2}\,;-1)$, E$(7\,;-4)$ et F$(-3\,;13)$. Déterminer les coordonnées des sommets du triangle défini par les droites AB, CD et EF.

1.11 Déterminer les équations des médianes du triangle donné par les équations cartésiennes de ses côtés $(a) : 2\,x - 3\,y + 5 = 0$, $(b) : 5\,x - 2\,y = 26$ et $(c) : 3\,x + y - 9 = 0$. Montrer que les médianes sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées.

1.12 On donne les équations de deux côtés d'un parallélogramme $x - 2\,y = 4$, $x + 5\,y + 24 = 0$ et l'équation de l'une de ses diagonales $2\,x + 3\,y + 13 = 0$. Trouver l'équation de la seconde diagonale et les coordonnées des sommets.

Réponses

1.1

1) $\begin{cases} x = -2 + 5\,\lambda \\ y = 3 - 7\,\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad 7\,x + 5\,y - 1 = 0$

2) $\begin{cases} x = 2 + 5\,\lambda \\ y = 5 - 7\,\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad 7\,x + 5\,y - 39 = 0$

3) $\begin{cases} x = 2 + 3\,\lambda \\ y = 5 + 4\,\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad 4\,x - 3\,y + 7 = 0$

1.2

1) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad m = -\frac{5}{7} \qquad h = 3$

2) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad m = \frac{5}{8} \qquad h = 7$

3) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad m = -\frac{7}{3} \qquad h = -7$

1.3

1) $\begin{cases} x = -5 - 3\,\lambda \\ y = 4 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad x + 3\,y - 7 = 0 \qquad m = -\frac{1}{3} \qquad h = \frac{7}{3}$

2) $\begin{cases} x = 3 + 5\,\lambda \\ y = -7 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad x + 5\,y + 32 = 0 \qquad m = -\frac{1}{5} \qquad h = -\frac{32}{5}$

3) $\begin{cases} x = 7 - 2\,\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad x + 2\,y - 11 = 0 \qquad m = -\frac{1}{2} \qquad h = \frac{11}{2}$

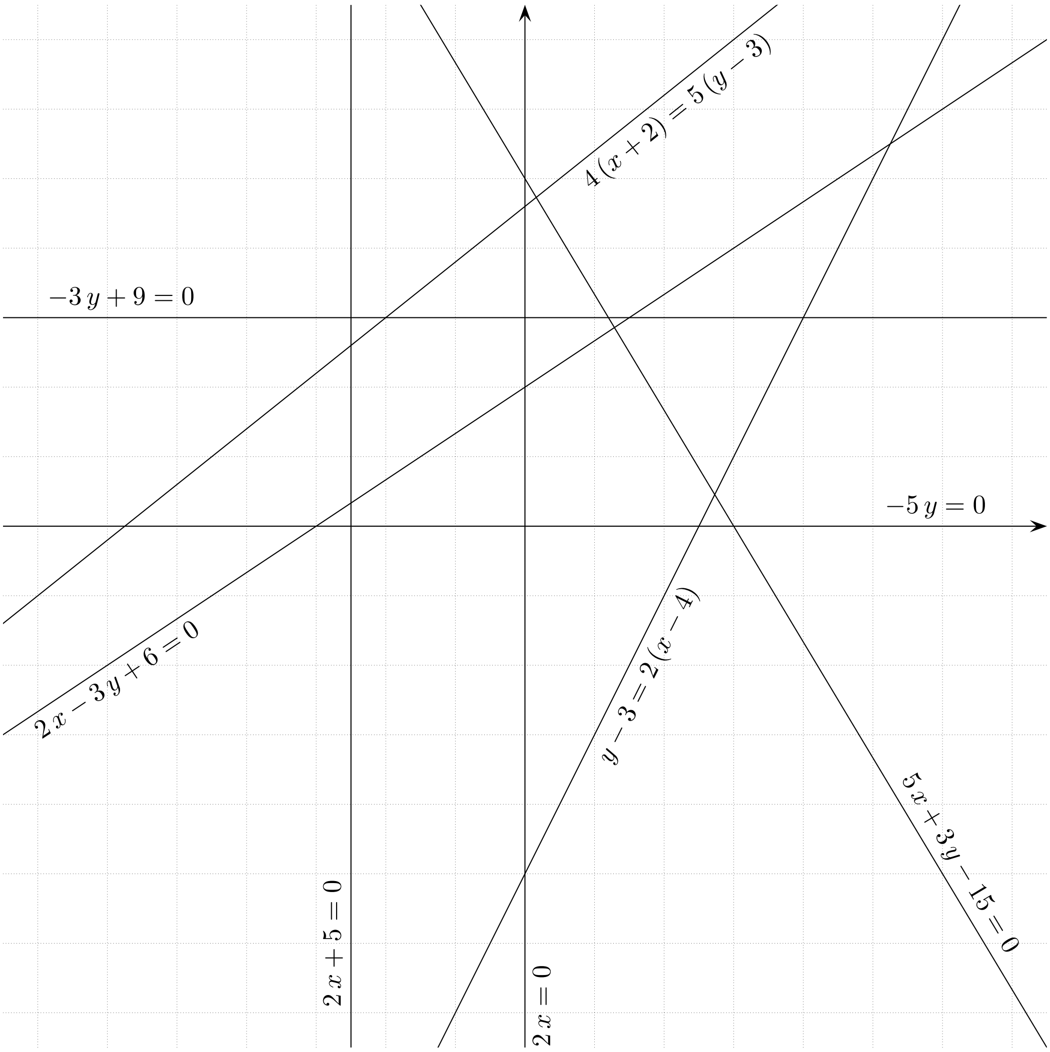
4) $\begin{cases} x = -7 + \lambda \\ y = 8 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad y - 8 = 0 \qquad m = 0 \qquad h = 8$

5) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad x - 4 = 0$

6) $\begin{cases} x = 5\,\lambda \\ y = -3\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad 3\,x + 5\,y = 0 \qquad m = -\frac{3}{5} \qquad h = 0$

1.4 1) $\mathrm{A} \notin d_1$ $\quad \mathrm{B} \in d_1$ $\quad \mathrm{C} \in d_1$ $\qquad$ 2) $\mathrm{A} \in d_2$ $\quad \mathrm{B} \in d_2$ $\quad \mathrm{C} \notin d_2$

1.5



1.6

1) $(3\,;\frac{15}{2})$	2) $(-\frac{14}{3}\,;-4)$	3) $(-6\,;-6)$
4) $(-2\,;0)$	5) $(0\,;3)$	6) $(-\frac{34}{11}\,;-\frac{18}{11})$

1.7

1) $(3\,;2)$	2) $(4\,;0)$	3) $(2\,;3)$
4) $(0\,;2)$	5) $\varnothing$ (droites parallèles)	6) $\{(t\,;-t+3) : t \in \mathbb{R}\}$ (droites confondues)

1.9 $\mathrm{A}(2\,;4)$ $\quad \mathrm{B}(2\,;-1)$ $\quad \mathrm{C}(-1\,;3)$

1.10 $(0\,;5)$ $\quad (0\,;\frac{79}{10})$ $\quad (\frac{377}{101}\,;\frac{157}{101})$

1.11 $(g_{\mathrm{A}}) : 8\,x - y - 35 = 0$ $\quad (g_{\mathrm{B}}) : x + 4\,y - 14 = 0$ $\quad (g_{\mathrm{C}}) : 7\,x - 5\,y - 21 = 0$
$\mathrm{G}(\frac{14}{3}\,;\frac{7}{3})$

1.12 $y + 4 = 0$ $\quad (-4\,;-4)$ $\quad (1\,;-5)$ $\quad (3\,;-4)$ $\quad (-2\,;-3)$