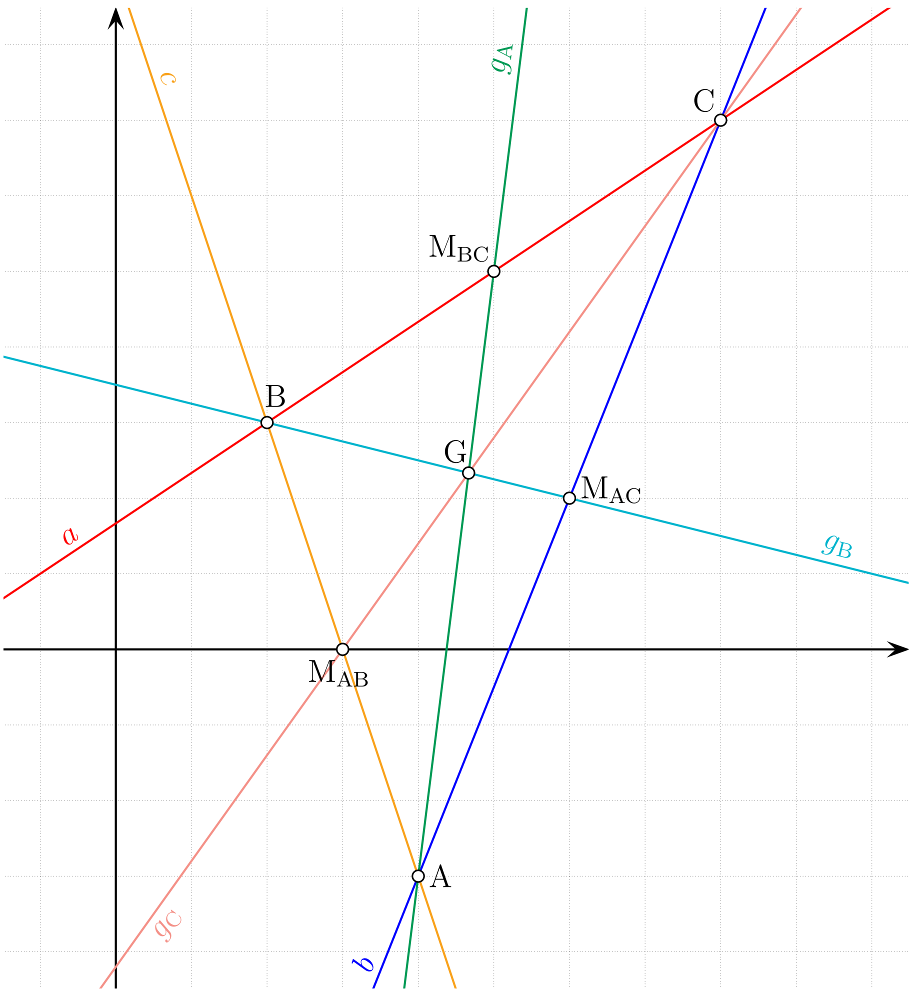
1.11



Calcul du point $A = b \cap c$

$$\begin{cases} 5\,x - 2\,y - 26 = 0 \\ 3\,x + \,y - 9 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation donne $y = -3\,x + 9$ que l'on remplace dans la première : $5\,x - 2\,(-3\,x + 9) - 26 = 0$, de sorte que $x = 4$.

De là suit que $y = -3 \cdot 4 + 9 = -3$. Donc $\boxed{A(4\,;-3)}$.

Calcul du point $B = a \cap c$

$$\begin{cases} 2\,x - 3\,y + 5 = 0 \\ 3\,x + \,y - 9 = 0 \end{cases}$$

Vu que la seconde équation délivre $y = -3\,x + 9$, on obtient pour la première équation : $2\,x - 3\,(-3\,x + 9) + 5 = 0$, d'où l'on tire que $x = 2$.

Par suite, $y = -3 \cdot 2 + 9 = 3$ et l'on a ainsi $\boxed{B(2\,;3)}$.

Calcul du point $C = a \cap b$

$$\begin{cases} 2\,x - 3\,y + 5 = 0 \\ 5\,x - 2\,y - 26 = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot(-2) \\ \cdot 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cdot(-5) \\ \cdot 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrr} -4\,x & +\,6\,y & -\,10 & = 0 \\ 15\,x & -\,6\,y & -\,78 & = 0 \\ \hline 11\,x & & -\,88 & = 0 \end{array} \iff x = 8 \qquad \begin{array}{rrrr} -10\,x & +\,15\,y & -\,25 & = 0 \\ 10\,x & -\,4\,y & -\,52 & = 0 \\ \hline & 11\,y & -\,77 & = 0 \end{array} \iff y = 7$$

Par conséquent, on a $\boxed{\mathrm{C}(8\,;7)}$.

Calcul de la médiane g_{A}

milieu des points B et C : $\mathrm{M_{BC}}(\frac{2+8}{2}\,;\frac{3+7}{2}) = \mathrm{M_{BC}}(5\,;5)$

$\overrightarrow{\mathrm{AM_{BC}}} = \begin{pmatrix} 5-4 \\ 5-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

L'équation de la médiane g_{A} est donc de la forme $8\,x - y + c = 0$.

Comme elle passe par $\mathrm{A}(4\,;-3)$, elle vérifie $8 \cdot 4 - (-3) + c = 0$, donc $c = -35$.

En résumé, on a trouvé $\boxed{(g_{\mathrm{A}}) : 8\,x - y - 35 = 0}$.

Calcul de la médiane g_{B}

milieu des points A et C : $\mathrm{M_{AC}}(\frac{4+8}{2}\,;\frac{-3+7}{2}) = \mathrm{M_{AC}}(6\,;2)$

$\overrightarrow{\mathrm{BM_{AC}}} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} x-2 & 4 \\ y-3 & -1 \end{vmatrix} = -1\,(x-2) - 4\,(y-3) = -x - 4\,y + 14 = 0$

En définitive, on a $\boxed{(g_{\mathrm{B}}) : x + 4\,y - 14 = 0}$.

Calcul de la médiane g_{C}

milieu des points A et B : $\mathrm{M_{AB}}(\frac{4+2}{2}\,;\frac{-3+3}{2}) = \mathrm{M_{AB}}(3\,;0)$

$\overrightarrow{\mathrm{CM_{AB}}} = \begin{pmatrix} 3-8 \\ 0-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 8 + 5\,\lambda \\ y &=& 7 + 7\,\lambda \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot 7 \\ \cdot(-5) \end{array}\right. \qquad \begin{array}{rcl} 7\,x &=& 56 + 35\,\lambda \\ -5\,y &=& -35 - 35\,\lambda \\ \hline 7\,x - 5\,y &=& 21 \end{array}$$

Par conséquent, l'équation recherchée est $\boxed{(g_{\mathrm{C}}) : 7\,x - 5\,y - 21 = 0}$.

Calcul de l'intersection $\mathrm{G} = g_{\mathrm{A}} \cap g_{\mathrm{B}}$

$$\left\{\begin{array}{l} 8\,x - y - 35 = 0 \\ x + 4\,y - 14 = 0 \end{array}\right.$$

La première équation donne $y = 8\,x - 35$ que l'on remplace dans la seconde : $x + 4\,(8\,x - 35) - 14 = 0$, d'où l'on déduit que $x = \frac{14}{3}$.

Par conséquent, $y = 8 \cdot \frac{14}{3} - 35 = \frac{7}{3}$. Ainsi $\boxed{\mathrm{G}(\frac{14}{3}\,;\frac{7}{3})}$.

Pour montrer que les trois médianes sont bien concourantes, il reste à vérifier que le point G appartient effectivement à la droite g_{C} : $7 \cdot \frac{14}{3} - 5 \cdot \frac{7}{3} - 21 = 0$.

Remarque : puisque le point G est le centre de gravité du triangle ABC, on peut le calculer beaucoup plus simplement : $\mathrm{G}(\frac{4+2+8}{3}\,;\frac{-3+3+7}{3}) = \mathrm{G}(\frac{14}{3}\,;\frac{7}{3})$