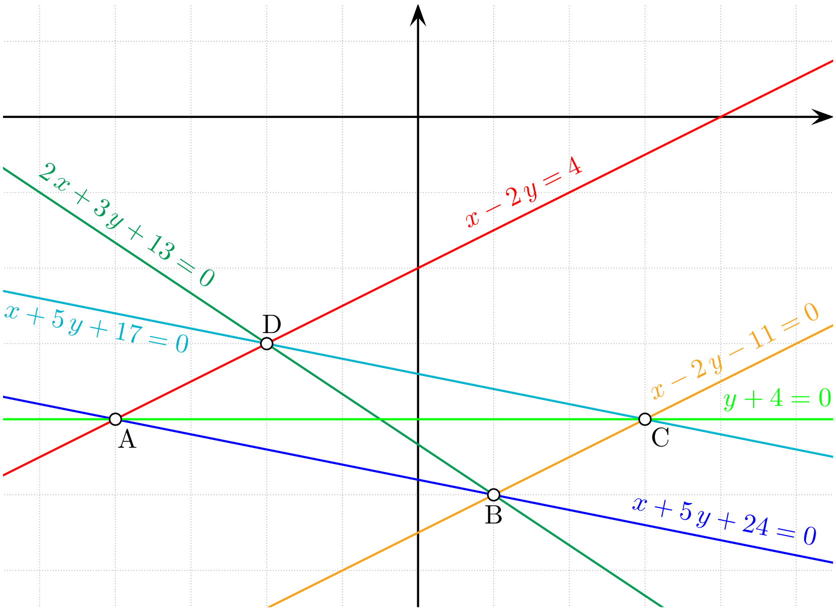
1.12



Calcul du point A

$$\begin{cases} x - 2\,y - 4 = 0 \\ x + 5\,y + 24 = 0 \end{cases}$$

La première équation donne $x = 2\,y + 4$ que l'on remplace dans la seconde : $(2\,y + 4) + 5\,y + 24 = 0$, si bien que $y = -4$.

On en déduit $x = 2 \cdot (-4) + 4 = -4$ et également $\boxed{\mathrm{A}(-4\,;-4)}$.

Calcul du point B

$$\begin{cases} x + 5\,y + 24 = 0 \\ 2\,x + 3\,y + 13 = 0 \end{cases}$$

La première équation délivre $x = -5\,y - 24$ que l'on substitue dans la seconde : $2\,(-5\,y - 24) + 3\,y + 13 = 0$ d'où l'on tire que $y = -5$.

Par suite, $x = -5 \cdot (-5) - 24 = 1$ et donc $\boxed{\mathrm{B}(1\,;-5)}$.

Calcul du point D

$$\begin{cases} x - 2\,y - 4 = 0 \\ 2\,x + 3\,y + 13 = 0 \end{cases}$$

La première équation entraîne la substitution $x = 2\,y + 4$ dans la seconde : $2\,(2\,y + 4) + 3\,y + 13 = 0$, de sorte que $y = -3$.

Dès lors, on a $x = 2 \cdot (-3) + 4 = -2$ et par conséquent $\boxed{\mathrm{D}(-2\,;-3)}$.

Calcul du point C **(1**[re] **méthode)**

On calcule d'une part $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 - (-4) \\ -5 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

et d'autre part $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \begin{pmatrix} c_1 - (-2) \\ c_2 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 2 \\ c_2 + 3 \end{pmatrix}$.

Mais, puisque ABCD est un parallélogramme, on a l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$:

$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 2 \\ c_2 + 3 \end{pmatrix}$ entraînant $\begin{cases} c_1 = 5 - 2 = 3 \\ c_2 = -1 - 3 = -4 \end{cases}$ à savoir $\boxed{\mathrm{C}(3\,;-4)}$.

Calcul du point C (2$^{\text{e}}$ méthode)

Calcul de la droite CD

Étant donné que la droite CD est parallèle à la droite $(AB) : x+5\,y+24=0$, elle est de la forme $x+5\,y+c=0$.

De plus, elle passe par le point D : $-2+5\cdot(-3)+c=0$ donne $c=17$.

On possède ainsi une équation cartésienne $\boxed{(CD) : x+5\,y+17=0}$.

Calcul de la droite BC

Comme BC est parallèle à $(AD) : x-2\,y-4=0$, son équation est de la forme $x-2\,y+c=0$.

En outre, la droite BC passe par le point B : $1-2\cdot(-5)+c=0$, d'où $c=-11$.

C'est pourquoi on obtient l'équation $\boxed{(BC) : x-2\,y-11=0}$.

Calcul de l'intersection $CD \cap BC$

$$\begin{cases} x+5\,y+17=0 \\ x-2\,y-11=0 \end{cases}$$

En soustrayant la seconde équation de la première, on obtient $7\,y+28=0$, c'est-à-dire $y=-4$.

Grâce à la seconde équation, on trouve $x=2\,y+11=2\cdot(-4)+11=3$.

On connaît désormais les coordonnées du point recherché : $\boxed{C(3\,;-4)}$.

Calcul de la diagonale AC

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} 3-(-4) \\ -4-(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}=7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x+4 & 1 \\ y+4 & 0 \end{vmatrix}=0\,(x+4)-1\,(y+4)=-y-4=0 \iff y+4=0$$

En conclusion, la seconde diagonale a pour équation $\boxed{(AC) : y+4=0}$.