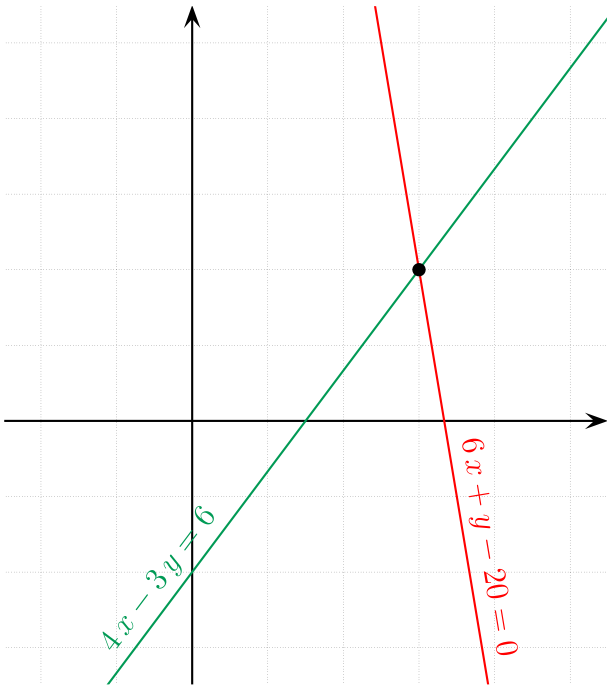
1.7 Les coordonnées du point d'intersection de deux droites doivent vérifier conjointement chacune des équations de ces droites.

1)



$$\begin{cases} 4\,x - 3\,y = 6 \\ 6\,x + y - 20 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation fournit $y = -6\,x + 20$ que l'on remplace dans la première : $4\,x - 3\,(-6\,x + 20) = 6$, d'où l'on tire $x = 3$.

Par suite, $y = -6 \cdot 3 + 20 = 2$.

Puisque $x = 3$ et $y = 2$, le point d'intersection est $(3\,;2)$.

2) Exprimons la seconde droite sous forme cartésienne :

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& 16 - 4\,\lambda \\ y &=& -6 + 2\,\lambda \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x &=& 16 - 4\,\lambda \\ 2\,y &=& -12 + 4\,\lambda \\ \hline x + 2\,y &=& 4 \end{array}$$

La solution du système d'équations suivant délivre donc les coordonnées du point d'intersection :

$$\begin{cases} 2\,x - 9\,y - 8 = 0 \\ x + 2\,y = 4 \end{cases}$$

La seconde équation implique $x = 4 - 2\,y$ que l'on substitue dans la première : $2\,(4 - 2\,y) - 9\,y - 8 = 0$, si bien que $y = 0$.

Dès lors, $x = 4 - 2 \cdot 0 = 4$.

En résumé, $x = 4$ et $y = 0$, de sorte que le point d'intersection est $(4\,;0)$.

3) En égalant les coordonnées respectives des équations paramétriques, on obtient :

$$\begin{cases} -2 + \lambda = 5 + 3\,\mu \\ -5 + 2\,\lambda = 5 + 2\,\mu \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda - 3\,\mu - 7 = 0 \\ 2\,\lambda - 2\,\mu - 10 = 0 \end{cases}$$

La première équation donne $\lambda = 3\,\mu+7$ que l'on remplace dans la seconde : $2\,(3\,\mu+7) - 2\,\mu - 10 = 0$, d'où l'on tire $\mu = -1$.

On obtient les coordonnées du point d'intersection en remplaçant $\mu = -1$ dans la seconde équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 5 + 3 \cdot (-1) = 2 \\ y = 5 + 2 \cdot (-1) = 3 \end{cases}$$

En définitive, le point d'intersection est bien $(2\,;3)$.

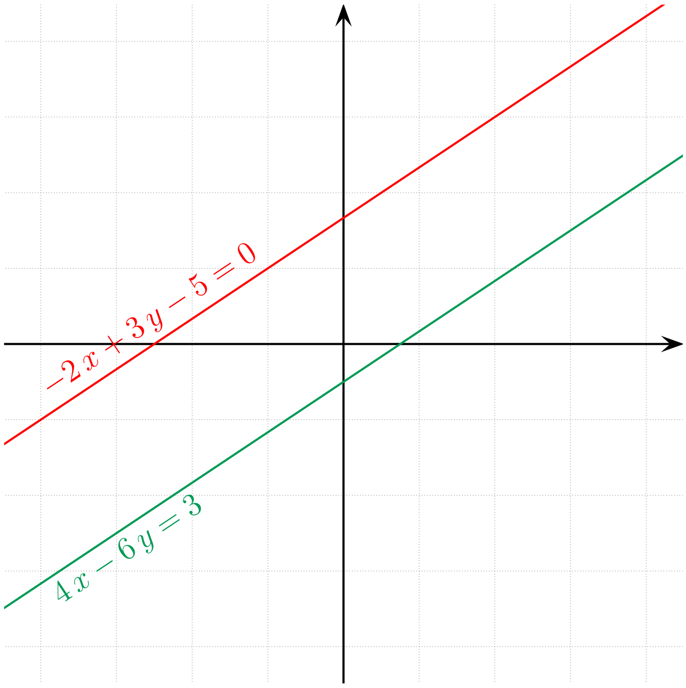
4) Il s'agit de résoudre le système des équations des droites :

$$\begin{cases} 4\,(x+3) = 3\,(6-y) \\ 3\,x + 2\,y = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4\,x + 3\,y - 6 = 0 \\ 3\,x + 2\,y - 4 = 0 \end{cases} \begin{array}{|l} \cdot(-2) \\ \cdot 3 \end{array} \quad \begin{array}{|l} \cdot 3 \\ \cdot(-4) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -8\,x - 6\,y + 12 &=& 0 \\ 9\,x + 6\,y - 12 &=& 0 \\ \hline x &=& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 12\,x + 9\,y - 18 &=& 0 \\ -12\,x - 8\,y + 16 &=& 0 \\ \hline y - 2 &=& 0 \end{array}$$

On conclut que $x = 0$ et $y = 2$: le point d'intersection est $(0\,;2)$.

5)



Si l'on cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4\,x - 6\,y = 3 \\ -2\,x + 3\,y - 5 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4\,x - 6\,y - 3 = 0 \\ -2\,x + 3\,y - 5 = 0 \end{cases} \begin{array}{|l} \\ \cdot 2 \end{array}$$

on obtient :
$$\begin{array}{rcl} 4\,x - 6\,y - 3 &=& 0 \\ -4\,x + 6\,y - 10 &=& 0 \\ \hline -13 &=& 0 \end{array}$$

ce qui est impossible : il n'y a donc pas de point d'intersection entre ces droites.

Géométriquement, cela signifie que ces droites sont parallèles ; elles possèdent en effet la même pente $\frac{2}{3}$:

$4\,x - 6\,y = 3 \Longleftrightarrow y = \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{2}$ et $-2\,x + 3\,y - 5 = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{2}{3}\,x + \frac{5}{3}$

6) Écrivons la première droite sous forme cartésienne :

$$\begin{array}{l} \quad x = 1 + \lambda \\ \quad y = 2 - \lambda \\ \hline x + y = 3 \end{array} \iff x + y - 3 = 0$$

Étant donné que les équations de la première et de la seconde droite sont équivalentes, ces droites sont confondues.