3.1 1) L'équation paramétrique est évidente : $\begin{cases} x = 1 + 5\,\mu \\ y = -2 - \lambda + 8\,\mu \\ z = 3 + \lambda - 3\,\mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

L'équation cartésienne peut s'obtenir de trois façons.

(a) Le produit vectoriel $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-3) - 2 \cdot 8 \\ 2 \cdot 5 - 0 \cdot (-3) \\ 0 \cdot 8 - (-2) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ fournit un vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ normal au plan.

L'équation cartésienne du plan est ainsi de la forme $x - y - z + d = 0$.

Comme le plan contient le point $\mathrm{A}(1\,;-2\,;3)$, on a :

$1 - (-2) - 3 + d = 0$, d'où suit $d = 0$.

On conclut que l'équation cartésienne du plan est $\boxed{x - y - z = 0}$.

(b) $0 = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 5 \\ y-(-2) & -2 & 8 \\ z-3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

$= (x-1) \cdot (-2) \cdot (-3) + (y+2) \cdot 2 \cdot 5 + (z-3) \cdot 0 \cdot 8$
$\quad - (z-3) \cdot (-2) \cdot 5 - (x-1) \cdot 2 \cdot 8 - (y+2) \cdot 0 \cdot (-3)$

$= 6\,x - 6 + 10\,y + 20 + 10\,z - 30 - 16\,x + 16$

$= -10\,x + 10\,y + 10\,z$

L'équation cartésienne du plan est donc $-10\,x + 10\,y + 10\,z = 0$ ou encore $\boxed{x - y - z = 0}$.

(c) Éliminons les paramètres de l'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 5\,\mu \\ y = -2 - \lambda + 8\,\mu \\ z = 3 + \lambda - 3\,\mu \end{cases}$.

En additionnant les deux dernières équations, on obtient :

$\begin{cases} x = 1 + 5\,\mu \\ y + z = 1 + 5\,\mu \end{cases}$

En soustrayant la seconde équation de la première, on trouve l'équation cartésienne du plan $\boxed{x - y - z = 0}$.

2) Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ constituent des vecteurs directeurs du plan ABC.

L'équation paramétrique de ce plan peut par conséquent être :

$\begin{cases} x = -6 + 11\,\lambda + 4\,\mu \\ y = 3 - \lambda + \mu \\ z = -2 + 3\,\lambda + 2\,\mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

L'équation cartésienne peut s'obtenir de trois façons.

(a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1\cdot 2 - 3\cdot 1 \\ 3\cdot 4 - 11\cdot 2 \\ 11\cdot 1 - (-1)\cdot 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} =$
$-10 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ délivre le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ normal au plan.

L'équation cartésienne du plan est dès lors de la forme
$x + 2\,y - 3\,z + d = 0$.

Par ailleurs, ce plan contient le point $\mathrm{A}(-6\,;3\,;-2)$, si bien que
$-6 + 2\cdot 3 - 3\cdot(-2) + d = 0$; on en tire $d = -6$.

En résumé, l'équation cartésienne du plan est $\boxed{x + 2\,y - 3\,z - 6 = 0}$.

(b) $0 = \begin{vmatrix} x-(-6) & 11 & 4 \\ y-3 & -1 & 1 \\ z-(-2) & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}
&= (x+6)\cdot(-1)\cdot 2 + (y-3)\cdot 3\cdot 4 + (z+2)\cdot 11\cdot 1 \\
&\quad - (z+2)\cdot(-1)\cdot 4 - (x+6)\cdot 3\cdot 1 - (y-3)\cdot 11\cdot 2 \\
&= -2\,x - 12 + 12\,y - 36 + 11\,z + 22 + 4\,z + 8 - 3\,x - 18 - 22\,y + 66 \\
&= -5\,x - 10\,y + 15\,z + 30
\end{aligned}$$

On obtient l'équation cartésienne $-5\,x - 10\,y + 15\,z + 30 = 0$ ou plus simplement $\boxed{x + 2\,y - 3\,z - 6 = 0}$.

(c) Éliminons les paramètres de l'équation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x &=& -6 &+& 11\,\lambda &+& 4\,\mu \\ y &=& 3 &-& \lambda &+& \mu \\ z &=& -2 &+& 3\,\lambda &+& 2\,\mu \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \cdot 1 \\ \cdot 11 \\ \end{array} \quad \begin{array}{|l} \\ \cdot 3 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x &+& 11\,y & & &=& 27 &+& 15\,\mu \\ & & 3\,y &+& z &=& 7 &+& 5\,\mu \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \cdot 1 \\ \cdot(-3) \end{array}$$

$x + 2\,y - 3\,z = 6$ ou si l'on préfère $\boxed{x + 2\,y - 3\,z - 6 = 0}$.

3) Tout vecteur perpendiculaire au vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ constitue un vecteur directeur du plan.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \vec{n}$, car $\vec{u}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1\cdot 5 + 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 5 = 0$.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \vec{n}$, puisque $\vec{v}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0\cdot 5 + 5\cdot(-2) + 2\cdot 5 = 0$.

On remarque également que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

On a donc l'équation paramétrique $\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -4 \quad\quad + 5\,\mu \\ z = 1 - \lambda + 2\,\mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Puisque le plan a pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, son équation cartésienne est de la forme $5\,x - 2\,y + 5\,z + d = 0$.
On sait également que le point $\mathrm{A}(-1\,;-4\,;1)$ appartient à ce plan :
$5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-4) + 5 \cdot 1 + d = 0$ implique $d = -8$.
On conclut que l'équation cartésienne de ce plan est $\boxed{5\,x - 2\,y + 5\,z - 8 = 0}$.

4) Puisque le plan recherché est parallèle au plan de la question 2), il admet les mêmes vecteurs directeurs et le même vecteur normal.
Comme il passe par le point $\mathrm{A}(-3\,;5\,;-4)$, son équation paramétrique est : $\begin{cases} x = -3 + 11\,\lambda + 4\,\mu \\ y = 5 - \lambda + \mu \\ z = -4 + 3\,\lambda + 2\,\mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

L'équation cartésienne de tout plan parallèle est de la forme $x + 2\,y - 3\,z + d = 0$. On recherche celui passant par $\mathrm{A}(-3\,;5\,;-4)$: $-3 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) + d = 0$ donne $d = -19$.
L'équation cartésienne du plan recherché est ainsi $\boxed{x + 2\,y - 3\,z - 19 = 0}$.

5) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ forme un vecteur normal.

Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ constituent des vecteurs directeurs du plan, car $\vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 = 0$ et $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 3 = 0$, ce qui signifie que $\vec{u} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\vec{v} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$. On constate également que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
On obtient ainsi l'équation paramétrique $\begin{cases} x = 3 \quad\quad + 3\,\mu \\ y = 1 + \lambda + 2\,\mu \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Puisque le plan a pour vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, son équation cartésienne est de la forme $2\,x - 3\,y + 3\,z + d = 0$.
Par ailleurs, ce plan contient le point $\mathrm{A}(3\,;1\,;1)$: $2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + d = 0$ implique $d = -6$.
On conclut à l'équation cartésienne $\boxed{2\,x - 3\,y + 3\,z - 6 = 0}$.

6) Le plan Oxz admet pour vecteurs directeurs $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

C'est pourquoi le plan recherché a pour équation paramétrique
$\begin{cases} x = & 7 + \lambda \\ y = & -4 \\ z = & 6 \quad + \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

Le vecteur $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan Oxz. L'équation cartésienne du plan est ainsi de la forme $y + d = 0$.
Sachant que le plan passe par le point A$(7\,;-4\,;6)$, on doit avoir $-4 + d = 0$, c'est-à-dire $d = 4$.
On obtient finalement l'équation cartésienne $\boxed{y + 4 = 0}$.

7) Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ constituent des vecteurs directeurs du plan.

Son équation paramétrique est donc $\begin{cases} x = & 3\,\lambda + \mu \\ y = & -2\,\lambda - \mu \\ z = & 5\,\lambda - \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Les trois méthodes que l'on a déjà rencontrées mènent à l'équation cartésienne du plan.

(a) Le produit vectoriel $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-1) - 5 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ délivre un vecteur normal au plan.
Son équation cartésienne est donc de la forme $7\,x + 8\,y - z + d = 0$.
Vu que ce plan passe par l'origine, on a $7 \cdot 0 + 8 \cdot 0 - 0 + d = 0$, d'où suit $d = 0$.
Le plan a dès lors pour équation cartésienne $\boxed{7\,x + 8\,y - z = 0}$.

(b) $0 = \begin{vmatrix} x - 0 & 3 & 1 \\ y - 0 & -2 & -1 \\ z - 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$
$= x \cdot (-2) \cdot (-1) + y \cdot 5 \cdot 1 + z \cdot 3 \cdot (-1) - z \cdot (-2) \cdot 1 - x \cdot 5 \cdot (-1) - y \cdot 3 \cdot (-1)$
$= 7\,x + 8\,y - z$
On obtient également l'équation cartésienne $\boxed{7\,x + 8\,y - z = 0}$.

(c) Éliminons les paramètres de l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3\,\lambda + \mu \\ y = -2\,\lambda - \mu \\ z = 5\,\lambda - \mu \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y = \lambda \\ x + z = 8\,\lambda \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 8 \\ \cdot(-1) \end{array} \right.$$

On en tire enfin $\boxed{7\,x + 8\,y - z = 0}$.

8) Le plan admet pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Son équation paramétrique est donc $\begin{cases} x = 2 - 3\,\lambda + \mu \\ y = 5 + 2\,\lambda - \mu \\ z = 1 - \lambda + \mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On peut aussi employer trois méthodes pour déterminer l'équation cartésienne de ce plan.

(a) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 1 - (-3) \cdot 1 \\ -3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan.

Par suite, l'équation cartésienne du plan est de la forme $x + 2\,y + z + d = 0$.

En outre, le plan passe par le point $\mathrm{A}(2\,;5\,;1)$, si bien que $2 + 2 \cdot 5 + 1 + d = 0$, ce qui entraîne $d = -13$.

L'équation cartésienne du plan est donc $\boxed{x + 2\,y + z - 13 = 0}$.

(b) $0 = \begin{vmatrix} x-2 & -3 & 1 \\ y-5 & 2 & -1 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (x-2) \cdot 2 \cdot 1 + (y-5) \cdot (-1) \cdot 1 + (z-1) \cdot (-3) \cdot (-1)$
$\quad - (z-1) \cdot 2 \cdot 1 - (x-2) \cdot (-1) \cdot (-1) - (y-5) \cdot (-3) \cdot 1$

$= 2\,x - 4 - y + 5 + 3\,z - 3 - 2\,z + 2 - x + 2 + 3\,y - 15$

$= x + 2\,y + z - 13$

On obtient par conséquent $\boxed{x + 2\,y + z - 13 = 0}$.

(c) Éliminons les paramètres de l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - 3\,\lambda + \mu \\ y = 5 + 2\,\lambda - \mu \\ z = 1 - \lambda + \mu \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 7 - \lambda \\ y + z & = & 6 + \lambda \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}\right.$$

Il en découle finalement $x+2\,y+z = 13$ c'est-à-dire $\boxed{x + 2\,y + z - 13 = 0}$.

9) Le plan admet pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Son équation paramétrique peut s'écrire $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = \lambda + \mu \end{array}\right.$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(a) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ constitue un vecteur normal au plan.
L'équation cartésienne du plan est dès lors de la forme $x - z + d = 0$.
Vu que ce plan passe par l'origine, on a $0 - 0 + d = 0$, ce qui donne $d = 0$.
Le plan a par conséquent pour équation cartésienne $\boxed{x - z = 0}$.

(b) $0 = \begin{vmatrix} x - 0 & 1 & 1 \\ y - 0 & 1 & -1 \\ z - 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
$= x \cdot 1 \cdot 1 + y \cdot 1 \cdot 1 + z \cdot 1 \cdot (-1) - z \cdot 1 \cdot 1 - x \cdot 1 \cdot (-1) - y \cdot 1 \cdot 1$
$= 2\,x - 2\,z$
On obtient ainsi l'équation cartésienne $2\,x - 2\,z = 0$ ou plus simplement encore $\boxed{x - z = 0}$.

(c) Éliminons les paramètres de l'équation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = \lambda + \mu \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 2\,\lambda \\ y + z & = & 2\,\lambda \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-1) \end{array}\right.$$

Il s'ensuit $\boxed{x - z = 0}$.