3.14 1) Calculons l'intersection des droites d_1 et d_2 :

$$\begin{cases} 5 + \lambda = 5 + 2\,\mu \\ 1 \qquad\; = 9 + 4\,\mu \\ -1 - \lambda = 7 + 2\,\mu \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl|l} \lambda - 2\,\mu & = & 0 & \cdot 1 \\ -\,4\,\mu & = & 8 & \\ -\lambda - 2\,\mu & = & 8 & \cdot 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl|l} \lambda - 2\,\mu & = & 0 & \cdot 1 \\ -\,4\,\mu & = & 8 & :2 \\ -\,4\,\mu & = & 8 & :4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl|l} \lambda - 2\,\mu & = & 0 & \cdot 1 \\ -\,4\,\mu & = & 8 & :(-2) \\ -\,4\,\mu & = & 8 & :(-4) \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \lambda = -4 \\ \mu = -2 \end{cases}$$

Les coordonnées du point $\mathrm{P} = d_1 \cap d_2$ sont ainsi données par :

$$\begin{cases} x = 5 + (-4) = 5 + 2 \cdot (-2) = 1 \\ y = 1 \qquad\qquad = 9 + 4 \cdot (-2) = 1 \\ z = -1 - (-4) = 7 + 2 \cdot (-2) = 3 \end{cases}$$

Le plan contenant les droites d_1 et d_2 passent par le point $\boxed{\mathrm{P}(1\,;1\,;3)}$ et admet pour vecteurs directeurs $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Son équation cartésienne est par conséquent :

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-1 & 0 & 2 \\ z-3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1) \cdot 0 \cdot 1 + (y-1) \cdot (-1) \cdot 1 + (z-3) \cdot 1 \cdot 2$$
$$- (z-3) \cdot 0 \cdot 1 - (x-1) \cdot (-1) \cdot 2 - (y-1) \cdot 1 \cdot 1$$
$$= -y + 1 + 2\,z - 6 + 2\,x - 2 - y + 1 =$$
$$= 2\,x - 2\,y + 2\,z - 6 =$$
$$= 2\,(x - y + z - 3)$$

En résumé, l'équation du plan recherché est $\boxed{x - y + z - 3 = 0}$.

2) Résolvons le système formé par deux équations cartésiennes de la première droite et par la première équation cartésienne de la seconde droite :

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-6}{2} \\ \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{z-1}{4} \\ 3\,x - 2\,y + 7\,z = -32 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,(x-2) = 3\,(y-6) \\ 4\,(x-2) = 3\,(z-1) \\ 3\,x - 2\,y + 7\,z = -32 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & & & = & -14 \\ 4x & & & - & 3z & = & 5 \\ 3x & - & 2y & + & 7z & = & -32 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l|l} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \cdot 1 & \\ & \cdot 2 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & & & = & -14 \\ & & 6y & - & 3z & = & 33 \\ & & 5y & + & 14z & = & -22 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l|l} & \\ :3 & \cdot(-5) \\ & \cdot 6 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & & & = & -14 \\ & & 2y & - & z & = & 11 \\ & & & & 99z & = & -297 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \\ \cdot 1 \\ :99 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & & & = & -14 \\ & & 2y & & & = & 8 \\ & & & & z & = & -3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l|l} \cdot 2 & \\ \cdot 3 & :2 \\ & \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 4x & & & = & -4 \\ & y & & = & 4 \\ & & z & = & -3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} :4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & & & = & -1 \\ & y & & = & 4 \\ & & z & = & -3 \end{array}\right.$$

Il s'agit à présent de s'assurer que ces valeurs vérifient la dernière équation de la seconde droite : $-1 + 4 + (-3) = 0$.

On conclut ainsi que les droites d_1 et d_2 se coupent au point $\boxed{P(-1\,;4\,;-3)}$.

La première droite admet pour vecteur directeur $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Recherchons un vecteur directeur de la seconde droite :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 7z & = & -32 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \cdot(-1) \\ \cdot(7) \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & 9y & & & = & 32 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \cdot(-1) \\ \cdot 9 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & 9y & & & = & 32 \\ 5x & & & + & 9z & = & -32 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & \frac{32}{9} - \frac{4}{9}x \\ z & = & -\frac{32}{9} - \frac{5}{9}x \end{array}\right.$$

La seconde droite a pour vecteur directeur $\vec{d_2} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{5}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Le plan recherché admet pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + 3\,\lambda + 9\,\mu \\ y = 4 + 2\,\lambda - 4\,\mu\,, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = -3 + 4\,\lambda - 5\,\mu \end{cases}$$

Éliminons les paramètres de ce système :

$$\begin{cases} x = -1 + 3\,\lambda + 9\,\mu \\ y = 4 + 2\,\lambda - 4\,\mu \\ z = -3 + 4\,\lambda - 5\,\mu \end{cases} \quad \begin{array}{|l|l} \cdot 2 & \\ \cdot(-3) & \cdot 2 \\ & \cdot(-1) \end{array}$$

$$\begin{cases} 2\,x - 3\,y = -14 + 30\,\mu \\ \phantom{2\,x - {}} 2\,y - z = 11 - 3\,\mu \end{cases} \quad \begin{array}{|l} \cdot 1 \\ \cdot 10 \end{array}$$

$2\,x + 17\,y - 10\,z = 96$ ou encore $\boxed{2\,x + 17\,y - 10\,z - 96 = 0}$.