3.15 **Équation du plan** ABC

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ implique que le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ constitue un vecteur normal au plan ABC.

L'équation du plan ABC est ainsi de la forme (ABC) : $x + y + z + d = 0$.

Attendu que le plan ABC contient le point $A(3\,;0\,;0)$, on doit avoir :
$3 + 0 + 0 + d = 0$, d'où suit $d = -3$.

Le plan ABC a donc pour équation $\boxed{(\text{ABC}) : x + y + z - 3 = 0}$.

Équation de la droite d **passant par** D **et de direction** OC

Puisque $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a : $\boxed{(d) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}}$.

Calcul du point d'intersection $\mathrm{I} = \mathrm{ABC} \cap d$

En remplaçant les coordonnées fournies par l'équation paramétrique de la droite d dans l'équation cartésienne du plan ABC, on obtient :
$1 + 2 + 3 + \lambda - 3 = 0$ de sorte que $\lambda = -3$.

Les coordonnées du point I valent par conséquent $\begin{cases} x = 1 & = 1 \\ y = 2 & = 2 \\ z = 3 + (-3) & = 0 \end{cases}$.

Calcul du point D$'$**, symétrique du point** D

Vu que le point $\mathrm{I}(1\,;2\,;0)$ est le milieu des points $\mathrm{D}(1\,;2\,;3)$ et $\mathrm{D}'(d_1'\,;d_2'\,;d_3')$, on a :

$$\begin{cases} 1 = \frac{1+d_1'}{2} \\ 2 = \frac{2+d_2'}{2} \\ 0 = \frac{3+d_3'}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} d_1' = 1 \\ d_2' = 2 \\ d_3' = -3 \end{cases}$$

En définitive, le point recherché est $\boxed{\mathrm{D}'(1\,;2\,;-3)}$.