3.3 1) **Équation du plan α**

Le plan α a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il admet donc pour vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Son équation cartésienne est donc de la forme $x + d = 0$.

Puisque $\mathrm{A}(1\,;0\,;0) \in \alpha$, on a $1 + d = 0$, c'est-à-dire $d = -1$.

On conclut à l'équation cartésienne $\boxed{(\alpha) : x - 1 = 0}$.

Équation du plan β

Le plan β a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme il passe par le point $\mathrm{B}(0\,;1\,;0)$, son équation cartésienne est donnée par :

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & 1 & 0 \\ y-1 & 0 & 0 \\ z-0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(y-1)$$

Par conséquent, l'équation cartésienne du plan β est $\boxed{(\beta) : y - 1 = 0}$.

Équation du plan γ

Le plan γ a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vu que $\mathrm{C}(0\,;0\,;1) \in \gamma$, l'équation paramétrique de γ est :

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 0 \\ \cdot 0 \\ \cdot 1 \end{array} \right.$$

L'élimination des paramètres conduit à $z = 1$, c'est-à-dire $\boxed{(\gamma) : z - 1 = 0}$.

Coordonnées du point P

Les coordonnées du point P sont données par le système $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$

dont la solution est évidemment $\boxed{\mathrm{P}(1\,;1\,;1)}$.

2) **Équation du plan ABC**

Le plan ABC a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Son vecteur normal est donc $\vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
L'équation cartésienne du plan ABC est ainsi de la forme
(ABC) : $x + y + z + d = 0$.
Étant donné que le point A$(1\,;0\,;0)$ appartient au plan ABC, on doit avoir $1 + 0 + 0 + d = 0$, de sorte que $d = -1$.
En résumé, le plan ABC a pour équation $\boxed{(\mathrm{ABC}) : x + y + z - 1 = 0}$.

P $\notin$ ABC
Comme l'équation $1 + 1 + 1 - 1 = 0$ n'est pas vérifiée, le point P ne fait pas partie du plan ABC.