3.6 1) L'équation paramétrique est évidente : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 2\,\lambda \\ z = 3 + 2\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Les équations cartésiennes s'obtiennent en éliminant le paramètre :

$$\left\{\begin{array}{l|l} x = 1 & \\ y = 2 - 2\,\lambda & \cdot 1 \\ z = 3 + 2\,\lambda & \cdot 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y + z = 5 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

2) La droite passant par A$(2\,;3\,;5)$ et B$(1\,;5\,;7)$ admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-5 \\ 5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Son équation paramétrique peut ainsi être : $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - 2\,\lambda \\ z = 5 - 2\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Le système d'équations paramétriques est équivalent à :

$$\begin{cases} x - 2 = \lambda \\ y - 3 = -2\,\lambda \\ z - 5 = -2\,\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2 = \lambda \\ \dfrac{y-3}{-2} = \lambda \\ \dfrac{z-5}{-2} = \lambda \end{cases}$$

d'où l'on conclut $x - 2 = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-5}{-2}$.

3) La droite admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 5-4 \\ -2-0 \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Son équation paramétrique est ainsi $\begin{cases} x = 8 + \lambda \\ y = 6 - 2\,\lambda \\ z = -12 + 5\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Le système d'équations paramétriques est équivalent à :

$$\begin{cases} x - 8 = \lambda \\ y - 6 = -2\,\lambda \\ z + 12 = 5\,\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x - 8 = \lambda \\ \dfrac{y-6}{-2} = \lambda \\ \dfrac{z+12}{5} = \lambda \end{cases}$$

d'où l'on conclut $x - 8 = \dfrac{y-6}{-2} = \dfrac{z+12}{5}$.

4) La droite admet pour vecteur directeur le vecteur normal du plan $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aussi a-t-elle pour équation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 3\,\lambda \\ y = 3 - 2\,\lambda \\ z = 5 + \,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le système d'équations paramétriques équivaut à :

$$\begin{cases} x - 2 = 3\,\lambda \\ y - 3 = -2\,\lambda \\ z - 5 = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \lambda \\ \dfrac{y-3}{-2} = \lambda \\ z - 5 = \lambda \end{cases}$$

d'où suivent les équations cartésiennes $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{-2} = z - 5$.

5) Le plan admet pour vecteur normal $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \\ 7 \end{pmatrix}$ qui constitue également un vecteur directeur de la droite. Cette dernière a donc pour équation paramétrique $\begin{cases} x = 2\,\lambda \\ y = -13\,\lambda \\ z = 7\,\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le système d'équations paramétriques se ramène à : $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \lambda \\ \dfrac{y}{-13} = \lambda \\ \dfrac{z}{7} = \lambda \end{cases}$

d'où découlent les équations cartésiennes $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-13} = \dfrac{z}{7}$.

6) Étant donné que le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan, la droite admet pour équation paramétrique $\begin{cases} x = -8 \\ y = 10 \\ z = -12 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Le paramètre ne peut s'éliminer qu'en multipliant par 0 la dernière équation de ce système. On obtient alors $\begin{cases} x = -8 \\ y = 10 \end{cases}$.

7) La droite g admet pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et la droite h a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comme $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = -7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, la droite recherchée admet pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Il s'ensuit que son équation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

En éliminant le paramètre du système d'équations paramétriques

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 3 - \lambda \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \cdot 1 \\ \\ \cdot 1 \end{array}\right.$$

on aboutit à $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 4 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} y = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$.

8) L'intersection des plans $3\,x - y + z = 0$ et $x - y + z = 0$ conduit aux systèmes équivalents suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} 3\,x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 2\,x = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ z = z \end{cases}$$

La droite recherchée admet donc pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, de sorte que son équation paramétrique peut s'écrire $\begin{cases} x = 8 \\ y = -4 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

En éliminant le paramètre du système d'équations paramétriques, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 8 \\ y = -4 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{array}\right.$$

d'où résultent les équations cartésiennes $\begin{cases} x = 8 \\ y - z + 6 = 0 \end{cases}$.