3.8 On pose $\mathrm{P} = d \cap d_1$ et $\mathrm{Q} = d \cap d_2$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ sont colinéaires, puisqu'ils constituent tous deux des vecteurs directeurs de la droite d.
Il existe ainsi $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}$.

Écrivons les composantes de ces vecteurs :

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \begin{pmatrix} 4+3\,\mu-4 \\ 3+\mu-(-7) \\ 3+2\,\mu-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,\mu \\ 10+\mu \\ -2+2\,\mu \end{pmatrix}$$

$$k\,\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\begin{pmatrix} 2+\lambda-4 \\ 1+2\,\lambda-(-7) \\ 1-\lambda-5 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -2+\lambda \\ 8+2\,\lambda \\ -4-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,k+\lambda\,k \\ 8\,k+2\,\lambda\,k \\ -4\,k-\lambda\,k \end{pmatrix}$$

On obtient de la sorte le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\,\mu &=& -2\,k + \lambda\,k \\ 10+\mu &=& 8\,k+2\,\lambda\,k \\ -2+2\,\mu &=& -4\,k-\lambda\,k \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \\ \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array}$$

d'où l'on tire $6+5\,\mu = 0$, c'est-à-dire $\mu = -\frac{6}{5}$.

Il s'ensuit $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-\frac{6}{5}) \\ 10+(-\frac{6}{5}) \\ -2+2\cdot(-\frac{6}{5}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{5} \\ \frac{44}{5} \\ -\frac{22}{5} \end{pmatrix} = -\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 9 \\ -22 \\ 11 \end{pmatrix}$

En résumé, la droite d passe par le point $\mathrm{A}(4\,;-7\,;5)$
et admet pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 9 \\ -22 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Elle a donc pour équation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4+9\,\lambda \\ y &=& -7-22\,\lambda \\ z &=& 5+11\,\lambda \end{array}\right.$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2e méthode

Le point Q est donné par l'intersection de la droite d_2 avec le plan contenant la droite d_1 et le point A.

Ce plan admet pour vecteurs directeurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4-2 \\ -7-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur normal à ce plan est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Son équation cartésienne est ainsi de la forme $y+2\,z+d=0$. Comme ce plan contient le point A, on doit avoir $-7+2\cdot 5+d=0$, si bien que $d=-3$.
On conclut que l'équation de ce plan est $y+2\,z-3=0$.

Déterminons l'intersection de ce plan avec la droite d_2 :
$(3+\mu)+2\,(3+2\,\mu)-3=0$ délivre $\mu=-\frac{6}{5}$.
Les coordonnées du point Q sont dès lors données par :
$\begin{cases} x = 4 + 3 \cdot (-\frac{6}{5}) = \frac{2}{5} \\ y = 3 + (-\frac{6}{5}) = \frac{9}{5} \\ z = 3 + 2 \cdot (-\frac{6}{5}) = \frac{3}{5} \end{cases}$

On trouve alors $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}-4 \\ \frac{9}{5}-(-7) \\ \frac{3}{5}-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{5} \\ \frac{44}{5} \\ -\frac{22}{5} \end{pmatrix} = -\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 9 \\ -22 \\ 11 \end{pmatrix}$ et l'on conclut comme avec la première méthode.