3.9 1) La première droite a pour vecteur directeur $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La seconde droite a pour vecteur directeur $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs directeurs de ces droites étant colinéaires, les droites sont parallèles ou confondues.

On sait que le point $(1\,;-2\,;5)$ appartient à la première droite. Examinons s'il fait aussi partie de la seconde droite :

$$\begin{cases} 1 = -2 - 6\,\mu & \Longrightarrow \quad \mu = -\frac{1}{2} \\ -2 = 3 + 10\,\mu & \Longrightarrow \quad \mu = -\frac{1}{2} \\ 5 = 4 - 2\,\mu & \Longrightarrow \quad \mu = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Puisque le point $(1\,;-2\,;5)$ se situe également sur la seconde droite, on conclut que les droites sont confondues.

2) Les vecteurs directeurs respectifs des droites ne sont pas colinéaires :

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\,\lambda \\ -2\,\lambda \\ -4\,\lambda \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Les droites sont ainsi sécantes ou gauches, selon qu'elles possèdent un point d'intersection ou non.

Or le point $(2\,;3\,;5)$ appartient manifestement à chacune de ces droites, de sorte qu'elles sont sécantes.

3) Les vecteurs directeurs respectifs des droites ne sont pas colinéaires :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,\lambda \\ -12\,\lambda \\ -5\,\lambda \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Les droites sont ainsi sécantes ou gauches, selon qu'elles possèdent un point d'intersection ou non.

$$\begin{cases} 7 + 2\,\lambda = 6 + 4\,\mu \\ 5 - 6\,\lambda = -1 - 12\,\mu \\ 3 + 3\,\lambda = 5 - 5\,\mu \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2\,\lambda - 4\,\mu = -1 \\ -6\,\lambda + 12\,\mu = -6 \\ 3\,\lambda + 5\,\mu = 2 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot 3 \\ \cdot 1 \\ \end{vmatrix}$$

Les deux premières équations sont inconsistantes, puisqu'elles mènent à la contradiction $0 = -9$.

Il est donc impossible que les deux droites ait un point d'intersection, ce qui signifie qu'elles sont gauches.

4) Les vecteurs directeurs respectifs des droites ne sont pas colinéaires :

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,\lambda \\ 4\,\lambda \\ 6\,\lambda \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

Les droites sont ainsi sécantes ou gauches, selon qu'elles possèdent un point d'intersection ou non.

Puisqu'elles passent manifestement toutes deux par le point $(2\,;3\,;1)$, on conclut qu'elles sont sécantes.

5) Les équations cartésiennes de la première droite sont équivalentes à :

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2\,y+z=5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 - y \\ y = y \\ z = 5 - 2\,y \end{cases}$$

Par conséquent, la première droite passe par le point $(4\,;0\,;5)$ et admet pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Les équations cartésiennes de la seconde droite se ramènent à :

$$\begin{cases} x + 3\,y + z = 9 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \left|\begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}\right. \iff \begin{cases} 2\,x + 2\,y = 10 \\ x + 3\,y + z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - y \\ z = 9 - x - 3\,y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 - y \\ y = y \\ z = 4 - 2\,y \quad \big(= 9 - (5-y) - 3\,y\big) \end{cases}$$

La seconde droite admet ainsi aussi $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Les deux droites peuvent donc être parallèles ou confondues.

On sait que le point $(4\,;0\,;5)$ appartient à la première droite.

Mais il ne fait pas partie de la seconde droite, car les égalités du système $\begin{cases} 4 + 3\cdot 0 + 5 = 9 \\ 4 - 0 - 5 = -1 \neq 1 \end{cases}$ ne sont pas toutes vérifiées.

On en conclut que les droites sont strictement parallèles.

6) Le système d'équations cartésiennes de la première droite équivaut à :

$$\begin{cases} x + 2\,y - 5 = 0 \\ 3\,y + z - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 - 2\,y \\ y = y \\ z = 4 - 3\,y \end{cases}$$

Cette première droite passe donc par le point $(5\,;0\,;4)$ et admet $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Le système d'équations cartésiennes de la seconde droite entraîne :

$$\begin{cases} x + 2\,y - 3 = 0 \\ 3\,y + z - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 - 2\,y \\ y = y \\ z = 1 - 3\,y \end{cases}$$

Comme cette seconde droite possède le même vecteur directeur $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, les deux droites peuvent être parallèles ou confondues.

Mais les coordonnées du point $(5\,;0\,;4)$, qui appartient à la première droite, ne satisfont pas les équations de la seconde droite :
$\begin{cases} 5 + 2 \cdot 0 - 3 = 2 \neq 0 \\ 3 \cdot 0 + 4 - 1 = 3 \neq 0 \end{cases}$
En conclusion, les deux droites sont strictement parallèles.