2.20 Soit $(d) : a\,x + b\,y + c = 0$ une droite satisfaisant les conditions de l'énoncé.

Puisque la droite recherchée doit passer par le point $\mathrm{A}(1\,;1)$, l'on a :
$a \cdot 1 + b \cdot 1 + c = 0$, c'est-à-dire $a + b + c = 0$, d'où l'on tire $c = -a - b$.

Par ailleurs, la distance du point B à la droite $(d) : a\,x + b\,y + c = 0$ doit valoir 5 :

$$5 = \delta(\mathrm{B}\,;d) = \frac{\big|\, a \cdot (-6) + b \cdot 2 + c \,\big|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\big|\, -6\,a + 2\,b + (-a - b) \,\big|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\big|\, -7\,a + b \,\big|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

On obtient ainsi $5\sqrt{a^2 + b^2} = \big|\, -7\,a + b \,\big|$

En élevant au carré les termes de cette dernière égalité, il suit que :

$25\,(a^2 + b^2) = (-7\,a + b)^2$

$25\,a^2 + 25\,b^2 = 49\,a^2 - 14\,a\,b + b^2$

$24\,b^2 + 14\,a\,b - 24\,a^2 = 0$

$12\,b^2 + 7\,a\,b - 12\,a^2 = 0$

Résolvons cette dernière équation par rapport à la variable b :

$\Delta = (7\,a)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-12\,a^2) = 49\,a^2 + 576\,a^2 = 625\,a^2 = (25\,a)^2$

$$b_1 = \frac{-7\,a + 25\,a}{2 \cdot 12} = \frac{18\,a}{24} = \tfrac{3}{4}\,a \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{-7\,a - 25\,a}{2 \cdot 12} = \frac{-32\,a}{24} = -\tfrac{4}{3}\,a$$

Il y a donc deux droites qui satisfont les conditions de l'énoncé.

Équation de la première droite

$c_1 = -a - b_1 = -a - \frac{3}{4}\,a = -\frac{7}{4}\,a$

La première droite a ainsi pour équation $a\,x + \frac{3}{4}\,a\,y - \frac{7}{4}\,a = 0$.

En choisissant $a = 4$, on obtient finalement $\boxed{4\,x + 3\,y - 7 = 0}$.

Équation de la seconde droite

$c_2 = -a - b_2 = -a - (-\frac{4}{3}\,a) = \frac{1}{3}\,a$

La seconde droite a donc pour équation $a\,x - \frac{4}{3}\,a\,y + \frac{1}{3}\,a = 0$.

En choisissant $a = 3$, on obtient enfin $\boxed{3\,x - 4\,y + 1 = 0}$.