

Problème 1

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{4x^2 + 5x}$$

$$D_f: 4x^2 + 5x = x(4x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{5}{4}$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5/4; 0\}$$

$$Z_f = \emptyset, \quad f(x) \Big|_{-5/4}^0 + \Big| - \Big| + \quad \text{car } e^{3x} > 0 \text{ pour tout } x.$$

$$AV: \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -5/4} \frac{e^{-15/4}}{0} = \infty$$

donc il y a des AV en $x = 0$ et $x = -\frac{5}{4}$.

AH: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0}{\infty} = 0$ donc il y a une AH à gauche d'équation $y = 0$.

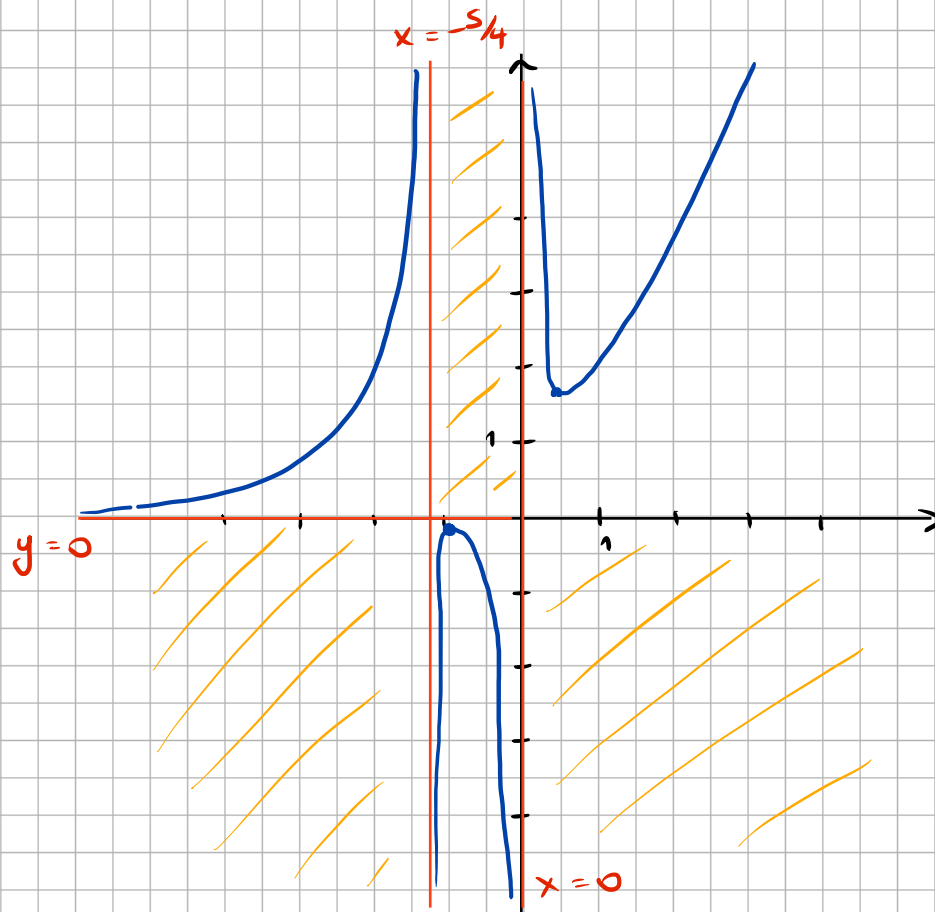
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{BH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{3x}}{8x + 5} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{BH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9e^{3x}}{8} = \infty \quad \text{donc pas d'AH à droite.}$$

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}(4x^2 + 5x) - e^{3x}(8x + 5)}{(4x^2 + 5x)^2} = \frac{e^{3x}(12x^2 + 15x - 8x - 5)}{(4x^2 + 5x)^2} = \frac{e^{3x}(12x^2 + 7x - 5)}{(4x^2 + 5x)^2}$$

$$\text{Zéros de } f': \Delta = 49 + 240 = 289, \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm 17}{24} \begin{matrix} \nearrow 5/12 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

	$-5/4$	-1	0	$5/12$		
e^{3x}	+	+	+	+	+	
$12x^2 + 7x - 5$	+	+	0	-	0	+
$(4x^2 + 5x)^2$	+	+	+	0	+	+
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		max		min		

On a un maximum en $m(-1; -0,05)$ et un minimum en $m(5/12; 1,26)$.
 $\approx 0,42$



Problème 2

a) $V = \text{base} \cdot \text{hauteur} = (24 - 4) \left(\frac{45}{2} - 2 \right) \cdot 2 = 820$

b)
$$V(x) = (24 - 2x) \cdot \left(\frac{45}{2} - x \right) \cdot x = (540 - 45x - 24x + 2x^2)x$$

$$= 2x^3 - 69x^2 + 540x$$

c) On calcule $V'(x) = 6x^2 - 138x + 540 =$

$$= 6 \left(x^2 - 23x + 90 \right) = 0$$

$$\Delta = 169, x_{1,2} = \frac{23 \pm 13}{2} \rightarrow \begin{matrix} 18 \\ 5 \end{matrix}$$

et x doit être ≤ 12
donc $x = 18$ n'est pas admissible

Valeurs admissibles : $0 \leq x \leq 12$

$V(x)$ est maximum si $x = 5$ cm.

	x_2	10	x_1
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Problème 3

a) $f(x) = x + \frac{5}{x} > 0$ si $x > 0$

On a $f(x) = 6 \Leftrightarrow x^2 + 5 = 6x \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 6x + 5}_{(x-5)(x-1)} = 0$

On a $f(2) = \frac{9}{2} < 6$ donc

$$A = \int_1^5 \left(6 - x - \frac{5}{x}\right) dx = 6x - \frac{1}{2}x^2 - 5\ln(|x|) \Big|_1^5$$

$$= 30 - \frac{25}{2} - 5\ln(5) - 6 + \frac{1}{2} = 12 - 5\ln(5) \approx 3,95$$

b) $V = \pi \int_1^2 \underbrace{\left(x + \frac{5}{x}\right)^2}_{x^2 + 10 + \frac{25}{x^2}} dx = \pi \int_1^2 \left(x^2 + 10 + \frac{25}{x^2}\right) dx$

$$= \pi \left(\frac{1}{3}x^3 + 10x - \frac{25}{x} \right) \Big|_1^2 =$$

$$= \pi \left(\frac{8}{3} + 20 - \frac{25}{2} - \frac{1}{3} - 10 + 25 \right) = \frac{149\pi}{6}$$

($\approx 78,02$)

c) L'équation de l'AO est $y = x$

(Avec une division euclidienne, $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x}$

$\begin{array}{r} x^2 + 5 \\ -x^2 \\ \hline 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} x \\ \hline x \end{array}$	donc $y = x$)
--	--	----------------

Problème 4

a) On a $\frac{\ln(1)}{1} = 0$ et $\frac{1}{1} - 1 = 0$ donc les deux courbes se coupent en $(1; 0)$.

De plus, $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

qui vaut 1 si $x=1$ et $\left(\frac{1}{x} - 1\right)' = -\frac{1}{x^2}$ qui

vaut -1 si $x=1$. Donc les deux courbes se coupent bien à angle droit en $(1; 0)$.

b) $\Gamma_1: (x-3)^2 + (y-5)^2 = \underbrace{2+9+25}_{36}$
donc $C_1(3; 5)$, $r_1 = 6$

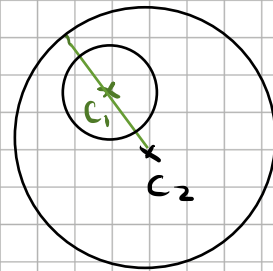
$\Gamma_2: (x-5)^2 + (y-8)^2 = 2^2$, $C_2(5; 8)$ et $r_2 = 2$.

$\overrightarrow{C_1 C_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{C_1 C_2}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3,6$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{C_1 C_2}\| < \widetilde{r_1 - r_2}^4$ donc

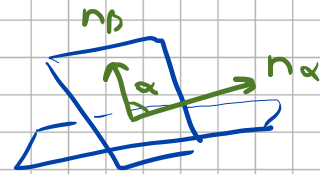
C_2 est intérieur à C_1

↳ ils sont donc disjointes.



Probleme 5

$$a) \quad \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|} = \frac{-2 + 4 + 2}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = \frac{4}{9}$$

$$\text{donc } \alpha \approx 63,61^\circ$$

$$b) \quad \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

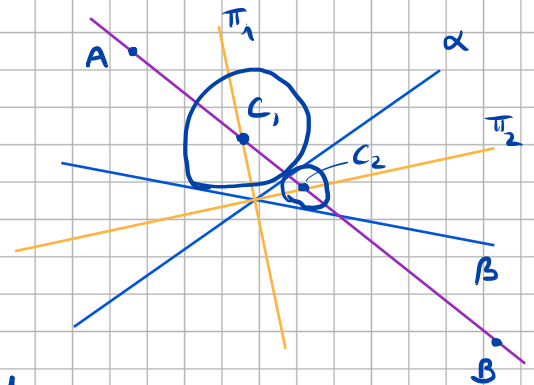
$$\text{donc } (\pi): 2x - 5y + 6z = -43.$$

$$c) \quad i) \quad \text{On a } \frac{2x + 2y + z - 39}{3} = \pm \frac{-x + 2y + 2z - 28}{3}$$

$$\oplus \quad (\pi_1): 3x - z = 11$$

$$\ominus \quad (\pi_2): x + 4y + 3z = 67$$

$$ii) \quad d_{AB}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -11 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \\ 27 \end{pmatrix}$$



$$d_{AB} \cap \pi_1: 3(4 - 3k) - (-11 + 27k) = 11$$

$$\Leftrightarrow -36k = -12 \quad \text{donc } k = \frac{1}{3} \quad \text{et}$$

$$C_1(3; 4; -2), \quad (\Sigma_1): (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = \underbrace{r^2}$$

$$\text{on } r = \delta(C_1; \alpha) = \frac{|6 + 8 - 2 - 39|}{3} = 9 \Rightarrow 81$$

$$d_{AB} \cap \pi_2: 4 - 3k + 4(-3 + 21k) + 3(-11 + 27k) = 67$$

$$\Leftrightarrow 162k = 108 \quad \text{donc } k = \frac{2}{3} \quad \text{et}$$

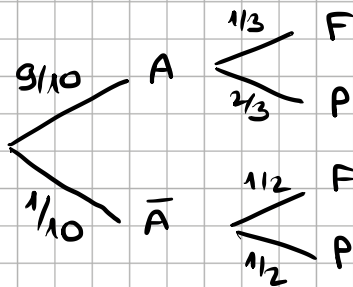
$$C_2(2; 11; 7), \quad (\Sigma_2): (x-2)^2 + (y-11)^2 + (z-7)^2 = \underbrace{r^2}$$

$$\text{on } r = \delta(C_2; \alpha) = \frac{|4 + 22 + 14 - 39|}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{9}$$

Probleme 6

$$a) p(7P \text{ et } 2F) = C_2^9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{512}{2187} \approx 23,41\%$$

$$b) A = \text{la pièce est pipée} \quad p(F) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{20} = 35\%$$



$$p(\bar{A} | F) = \frac{p(\bar{A} \cap F)}{p(F)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{7} \approx 14,29\%$$

- c) On a 2 cas : i) les deux pièces sont pipées
ii) l'une est pipée et l'autre équilibrée.

$$\begin{aligned} i) \quad p &= \frac{C_2^9}{C_2^{10}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{45} \approx 35,56\% \\ ii) \quad p &= \frac{C_1^9 \cdot C_1^1}{C_2^{10}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{15} \approx 6,67\% \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} i) \quad p &= \frac{C_2^9}{C_2^{10}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{45} \approx 35,56\% \\ ii) \quad p &= \frac{C_1^9 \cdot C_1^1}{C_2^{10}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{15} \approx 6,67\% \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} &\text{donc la prob.} \\ &\text{cherchée vaut} \\ &42,22\% = \frac{19}{45} \end{aligned}$$

Problème 7

$$a) \ker A : \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -L_2 \\ L_3+L_2 \\ L_1+3L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3-2L_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases} \quad \text{donc}$$

$$\ker A = \{ k(2; -1; 1) \mid k \in \mathbb{R} \} = \langle \underbrace{(2; -1; 1)}_{\text{base du noyau}} \rangle.$$

$$\text{Donc } \text{Rg}(A) = 2 \quad \text{et } \text{Im}(A) = \langle \underbrace{(3; -1; 1), (2; 0; 1)}_{\text{base de l'image}} \rangle$$

$$\begin{aligned} b) \quad \begin{vmatrix} 3-x & 2 & -4 \\ -1 & -x & 2 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3-x & 2 & -4 \\ 0 & 1-x & 1-x \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2+L_3 \\ \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 3-x & 2 & -6 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 1 & -2-x \end{vmatrix} = (1-x) \left(\underbrace{(3-x)(-2-x) + 6}_{x^2 - x - 6} \right) \\ &\quad \begin{array}{l} \\ C_3 - C_2 \end{array} \\ &= (1-x)(x^2 - x) = -x(x-1)^2 \quad \text{vp : } 0, 1 \end{aligned}$$

$$E_0 = \ker A = \langle (2; -1; 1) \rangle$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \{ (x; y; z) \mid x+y-2z=0 \} = \begin{cases} y=k, z=l \\ x=2l-k \end{cases} \\ &= \{ k(-1; 1; 0) + l(2; 0; 1) \mid k, l \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle (-1; 1; 0), (2; 0; 1) \rangle. \end{aligned}$$

$$\text{On a } A = {}_B(f)_B = \underbrace{{}_B(\text{id})_{B'}}_P \cdot \underbrace{{}_{B'}(f)_B}_D \cdot \underbrace{{}_{B'}(\text{id})_B}_{P^{-1}}$$

$$\text{on } P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) f est une projection sur le plan $x + y - 2z = 0$
 dans la direction de $(d): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}.$

$$d) \quad A^2 = (P D P^{-1})^2 = P D^2 P^{-1} \stackrel{D^2 = D}{=} P D P^{-1} = A$$

e) On a donc $A^n = A \quad \forall n \geq 1$ donc les vp
 et les espaces propres sont les mêmes que
 ceux de A .

Ex. 1

a) $f(x) = \frac{3x(x^2-2)}{x^2-3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$, $Z = \{0, \pm\sqrt{2}\}$

	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$3x$	-	-	-	+	+
x^2-2	+	+	0	-	-
x^2-3	+	0	-	-	+
$f(x)$	-	+	0	-	+

C'est une fonction impaire: $f(-x) = -f(x)$

AV: $\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{3}} f(x) = \frac{0}{0} = \infty$, il y a des AV d'équation $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$.

Vu les degrés, il y a une AO:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 6x & x^2 - 3 \\ - (3x^3 - 9x) & \\ \hline 3x & \end{array}$$

L'éq. de l'AO est $y = 3x$
 or $S(x) = \frac{3x}{x^2-3}$

Le graphe de f coupe l'AO en $P(0;0)$

b) $f'(x) = \frac{3(3x^2-2)(x^2-3) - (3x^3-6x) \cdot 2x}{(x^2-3)^2} =$
 $= \frac{3(3x^4 - 11x^2 + 6) - 3(2x^4 - 4x^2)}{(x^2-3)^2} = \frac{3(x^4 - 7x^2 + 6)}{(x^2-3)^2}$

c)

	$-\sqrt{6}$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$
$3(x^2-6)$	+	0	-	-	-	0
x^2-1	+	+	0	-	+	+
$(x^2-3)^2$	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗	↘	↗
	max		min	max		min

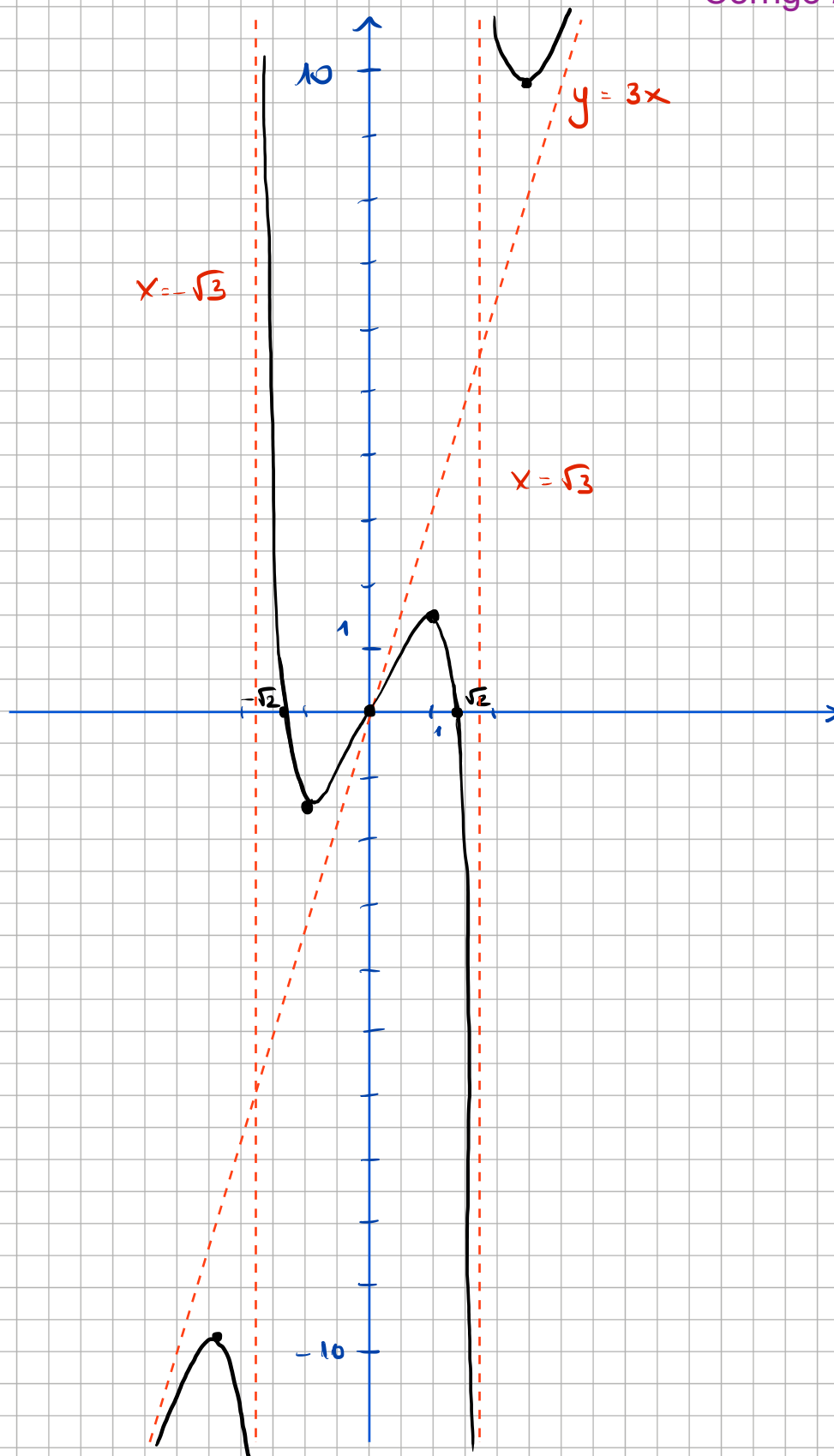
Max $(-\sqrt{6}; 4\sqrt{6})$
 $\approx 2,45 \quad \approx 9,8$

Min $(\sqrt{6}; -4\sqrt{6})$

Min $(-1; -1,5)$

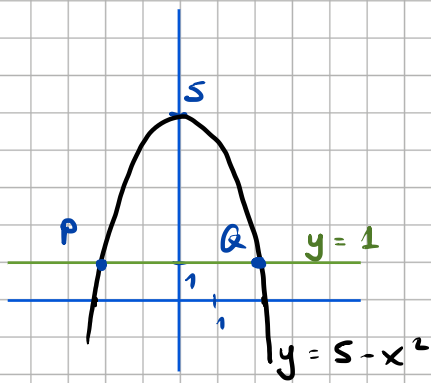
Max $(1; 1,5)$

d)



Ex. 2

b.)



La courbe $y = 5 - x^2$ est une parabole concave de sommet $S(0; 5)$.

Les points P et Q ont pour abscisses les x tels que $5 - x^2 = 1$ donc $x^2 = 4$ et $x = \pm 2$.

Ainsi $P(-2; 1)$ et $Q(2; 1)$.

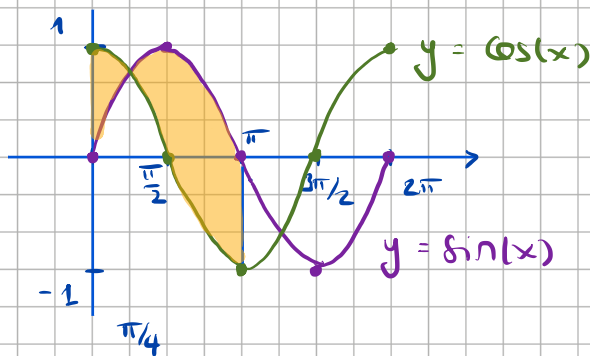
La courbe $y = 5 - x^2$ est au-dessus de $y = 1$ entre -2 et 2 .

$$\text{Donc } V = \pi \int_{-2}^2 ((5 - x^2)^2 - 1) dx \quad (\text{ou } 2\pi \int_0^2 ((5 - x^2)^2 - 1) dx)$$

$$= \pi \int_{-2}^2 (x^4 - 10x^2 + 24) dx = \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 24x \right) \Big|_{-2}^2$$

$$= \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{80}{3} + 48 \right) \cdot 2 = \pi \cdot \frac{416}{15} \cdot 2 = \frac{832\pi}{15} \approx 174,25$$

a.)



$$\sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow$$

$$\tan(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \sin(x)) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin(x) - \cos(x)) dx =$$

$$= (\sin(x) + \cos(x)) \Big|_0^{\pi/4} + (-\cos(x) - \sin(x)) \Big|_{\pi/4}^{\pi} =$$

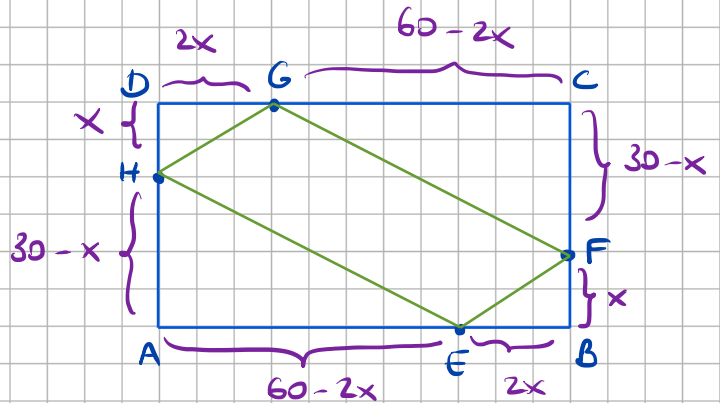
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 + 1 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$$

Ex 3

L'aire du parallélogramme EFGH s'obtient en enlevant à l'aire du rectangle ABCD les aires des quatre triangles rectangles.

Donc

$$f(x) = 60 \cdot 30 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x + \\ - 2 \cdot \frac{1}{2} (60 - 2x)(30 - x)$$



$$\Rightarrow f(x) = 1800 - 2x^2 - (1800 - 120x + 2x^2) \\ = -4x^2 + 120x$$

Les valeurs admissibles pour x sont $[0; 30]$.

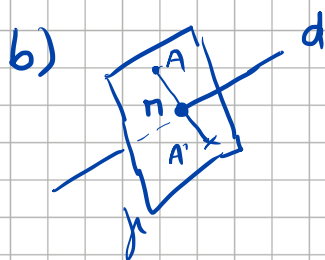
On a $f'(x) = -8x + 120$ qui s'annule en $x = 15$, qui est positive avant 15 et négative après.

L'aire est donc maximale pour $x = 15$ et vaut alors 900.

Problème 4 (GA)

$$a) \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } (\beta): 2x - y + 2z = -1$$



Soit π le plan perpendiculaire à d passant par A . Alors

$$(\pi): x - y - z = -7$$

$$\pi \cap d: (-\lambda) - (-2 + \lambda) - (3 + \lambda) = -7 \Leftrightarrow$$

$$3\lambda = 6 \text{ donc } \lambda = 2 \text{ et } M(-2; 0; 5)$$

$$\text{finalement } \vec{OA'} = \vec{OM} + \vec{MA'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A'(-1; -1; 7)$$

$$\Rightarrow (\Sigma_1): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 = 16$$

c) Déterminons le plan bissecteur de α et $\pi = \beta$.

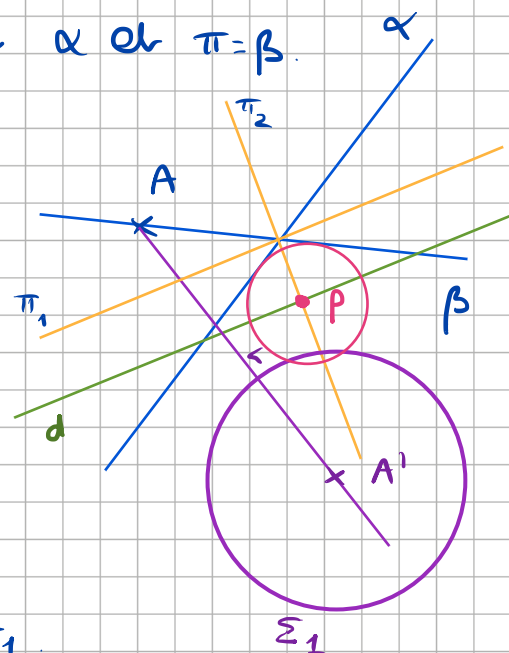
$$\frac{x + 2y - 2z - 1}{3} = \pm \frac{2x - y + 2z + 1}{3}$$

$$\oplus (\pi_1): x - 3y + 4z = -2$$

$$\ominus (\pi_2): 3x + y = 0$$

$$\pi_2 \cap d: -\lambda - 3(-2 + \lambda) + 4(3 + \lambda) = -2$$

$$\Rightarrow 18 = -2 \quad \zeta$$

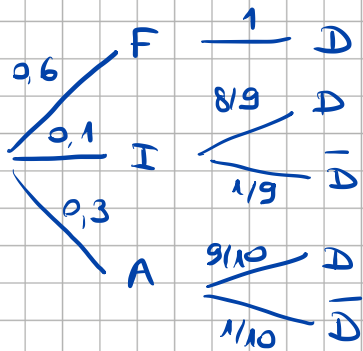


La droite d est parallèle au plan π_1 .

Il n'y a donc bien qu'une sphère.

Ex 5

- a) On note F = "un seul chiffre faux", I = "inversion de deux chiffres", A = "ajout ou soult d'un chiffre".
Puis D = "le def de contrôle détecte l'erreur".



$$b) p(D) = 0,6 + 0,1 \cdot \frac{8}{9} + 0,3 \cdot \frac{9}{10} = \frac{863}{900} \approx 95,89\%$$

- c) C'est une prob. conditionnelle :

$$p(F|D) = \frac{p(F \cap D)}{p(D)} =$$

$$= \frac{0,6 \cdot 1}{863/900} = \frac{540}{863} \approx 62,57\%$$

$$d) p(D|\bar{A}) = \frac{p(D \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{0,6 + 0,1 \cdot \frac{8}{9}}{0,6 + 0,1} = \frac{62}{63} \approx 98,41\%$$

$$e) p(8 \text{ CB détectés}) = C_8^{10} \left(\frac{863}{900}\right)^8 \cdot \left(\frac{37}{900}\right)^2 \approx 5,44\%$$

$$f) p(\bar{D} \text{ sur au moins un}) = 1 - p(10 \text{ CB détectés}) = 1 - \left(\frac{863}{900}\right)^{10} \approx 34,28\%$$

$$\pi_2 \cap d: 3(-2) + (-2+2) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -2 \text{ donc}$$

$$\lambda = -1 \text{ et } P(1; -3; 2)$$

$$r_2 = d(P; \alpha) = \frac{|1 - 6 - 4 - 1|}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\text{Et } \|\vec{AP}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{33} \approx 5,74 < r_1 + r_2$$

donc les sphères sont sécantes.

Problème 6 (AL)

$$\begin{aligned} \text{a) } \det(A - xI) &= \begin{vmatrix} 3-x & -4 & 4 \\ 2 & -3-x & 2 \\ -1 & 1 & -2-x \end{vmatrix} = \\ &\stackrel{C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 4 \\ 2 & -1-x & 2 \\ -1 & -1-x & -2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 4 \\ 2 & -1-x & 2 \\ -3 & 0 & -4-x \end{vmatrix} \stackrel{L_3-L_2}{=} \end{aligned}$$

$$= -(1+x) \left((3-x) \cdot (-4-x) + 12 \right) = -(1+x)(x^2 + x)$$

$$= -x(x+1)^2. \text{ Donc les vp sont } -1 \text{ et } 0.$$

$$\text{b) } E_0 = \ker A$$

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -L_3 \\ L_2 \\ L_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_1 + L_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\text{donc } z = -k, \quad x = 4k \text{ et } y = 2k. \quad \text{Ainsi}$$

$$E_0 = \left\langle \underbrace{(4; 2; -1)}_{B_0} \right\rangle^{\vec{v}_1}$$

$$E_{-1} : \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $y = k$, $z = l$, $x = k - l$ donc

$$E_{-1} = \underbrace{\left\langle \overset{\underline{v}_2}{(1; 1; 0)}, \overset{\underline{v}_3}{(-1; 0; 1)} \right\rangle}_{B_{-1}} \quad \left(\text{c'est le plan } x - y + z = 0 \right).$$

$$c) \quad A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B_d(\alpha)_{B_d}} \quad \text{et} \quad \underbrace{P}_{B(\text{id})_{B_d}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{où } B_d = B_0 \cup B_{-1})$$

$$d) \quad \text{Si } \underline{v} \in E_0, \quad A^2 \underline{v} = A(A\underline{v}) = A \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

$$\text{Si } \underline{v} \in E_{-1}, \quad A^2 \underline{v} = A(A\underline{v}) = A(-\underline{v}) = -A\underline{v} = -(-\underline{v}) = \underline{v}$$

donc les vp de A^2 sont 0 et 1.

A^2 est une projection sur $(\pi) : x - y + z = 0$

en direction de $\underline{v}_3 = (4; 2; -1)$

22) Problème 1

$$f(x) = \left(27 \cdot \left(\frac{5}{x^4} - \frac{30}{x^6} \right) \right) = \frac{135(x^2 - 6)}{x^6}$$

a) zeros : $\{\pm\sqrt{6}\}$ $\text{ED } f = \mathbb{R}^*$

$135(x^2 - 6)$	$+$	0	$-$	0	$+$
x^6	$+$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

(f est une fonction paire)

AV : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, AV : $x = 0$

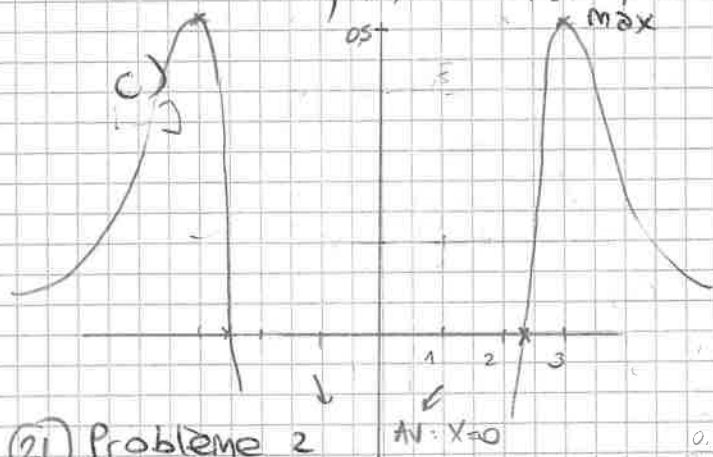
AH : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, AH : $y = 0$ (les intersections de

l'AH avec le graphe sont les zeros)

b) $f'(x) = \frac{135 \cdot 2x \cdot x^6 - 135(x^2 - 6) \cdot 6x^5}{x^{12}} = \frac{540(9 - x^2)}{x^7}$

$540(9 - x^2)$	$-$	0	$+$	0	$-$
x^7	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$

(f' est une fonction impaire)

Max en $(-3; \frac{5}{9})$ et en $(3; \frac{5}{9})$ 

d) $P(1; -675)$

$[3] \quad f'(1) = 4320$

(+) : $y = 4320x - 4995$

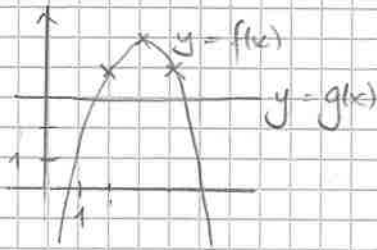
21) Problème 2

a) Div. euclidienne	$6x^2 + x + 1$	$2x + 1$
	$-(6x^2 + 3x)$	$3x - 1$
	$-2x + 1$	
	$-(-2x - 1)$	
	2	

donc $\int \frac{6x^2 + x + 1}{2x + 1} dx = \int \left(3x - 1 + \frac{2}{2x + 1} \right) dx =$

$= \frac{3}{2}x^2 - x + \ln(|2x + 1|) + C.$

b)



$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x-2) = 0$$

Vu le dessin, $A = \int_2^4 (-x^2 + 6x - 4 - 4) dx =$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x \right) \Big|_2^4 = -\frac{64}{3} + 48 - 32 + \frac{8}{3} - 12 + 16 = \frac{4}{3}.$$

c) On résout $\cos(3x + \pi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3x + \pi = \frac{\pi}{3} + k_1 \cdot 2\pi \\ 3x + \pi = -\frac{\pi}{3} + k_2 \cdot 2\pi, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = \\ = -3 \sin(3x + \pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + k_1 \cdot \frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{4\pi}{3} + k_2 \cdot \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x/2}}{\ln(x+1)} = \frac{0}{0} \stackrel{BH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} e^{-x/2}}{1/(x+1)} = \frac{1}{2}$

11

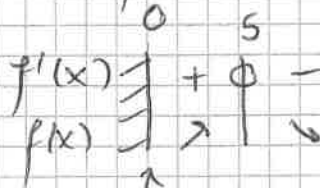
Problème 3

Volume : $x^2 y$ Contrainte : $360(2x^2 + 2xy) + 240xy = 54'000 + 1.240$

$$3x^2 + 3xy + xy = 225 \quad \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + 4xy = 225$$

$$\text{Donc } y = \frac{225 - 3x^2}{4x} = \frac{225}{4x} - \frac{3}{4}x$$

On veut maximiser $f(x) = \frac{225}{4}x - \frac{3}{4}x^3$ On a $f'(x) = \frac{225}{4} - \frac{9}{4}x^2$ qui s'annule en $x = \pm 5$ 

Le volume est donc

maximal pour $x = 5m$, $y = 7,5m$ Valeurs admissibles : $x, y \geq 0$

⑬ Problème 5

$$a) P(3 \text{ épicéas}) = 0,44^3 \approx 8,52\%$$

$$b) \text{ Il y a } 100 - 44 - 18 - 15 = 23\% \text{ de telles espèces.}$$

$$\text{Donc } p = (0,23)^7 \approx 0,0034\% < 0,01\%.$$

$$c) p = 1 - (1 - 0,18)^5 \approx 62,93\%$$

$$d) C_2^5 \cdot C_1^3 \cdot C_2^2 = 0,44^2 \cdot 0,18 \cdot 0,15^2 \approx 2,35\%$$

$$e) p(\text{sapin} | \text{sapin ou épicéa}) = \frac{0,15}{0,15 + 0,44} \approx 25,42\%$$

16

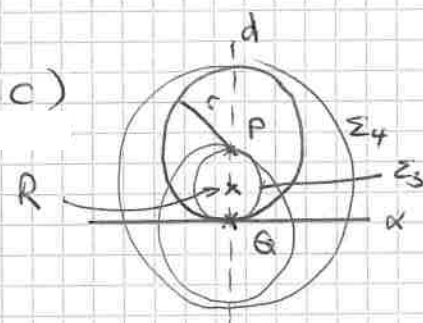
Problème 4

a) $(\Sigma_1): (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \underbrace{3+4+1}_{=36}$
 donc $P(2; -1; 0)$, $r = 6$.

b) On a $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

donc $(\alpha): 2x - 2y - z = -12$

On a $S(P, \alpha) = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 12|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{18}{3} = 6 = r$.



d = perpendiculaire à α par P .

(d): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

$Q = d \cap \alpha$

$2(2+2k) - 2(-1-2k) - (-k) = -12 \Leftrightarrow 9k = -18$

donc $k = -2$ et $Q(-2; 3; 2)$

Donc $(\Sigma_2): (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 36$.

d) Appelons Σ_3 et Σ_4 ces deux sphères, (cf. figures)
 centrées en $R = M_{PR}$, $R(0, 1; 1)$ et de rayon
 $r_3 = \frac{6}{2} = 3$ et $r_4 = 9$

Donc $(\Sigma_3): x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$

$(\Sigma_4): x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 81$.

Problème 6

12

Partie A

a) $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3+2L_1]{1/3 L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1-2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ donc $\ker A = \langle (1; 0; 1) \rangle$.
 Base $((1; 0; 1))$.

b) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, valeur propre 3.

On a $E_3 = \ker(A - 3I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$
 $= \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc c'est le plan $-2x + 2y - z = 0$

Soit $z = -2x + 2y$. Donc $E_3 = \langle (1, 0, -2), (0, 1, 2) \rangle$

c) Oui, elle est diagonalisable car

$\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 0, -2), (0, 1, 2))$ est une base de vecteurs propres.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Corrige 2019 3Mr

Solution 1. (18 points)

La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et f s'annule si $2x^3 = 0$, donc en $x = 0$.

Le signe de f est le suivant

x	0			1		
$f(x)$	-	0	+		-	+

S'il y a une AV, c'est en $x = 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3}{(x-1)^2} = \infty$, la fonction f admet la droite $x = 1$ comme asymptote verticale.

Comme le numérateur est de degré un de plus que le dénominateur, il y a une AO (que l'on peut obtenir par division euclidienne par exemple), d'équation $y = 2x + 4$.

La dérivée de f est donnée par

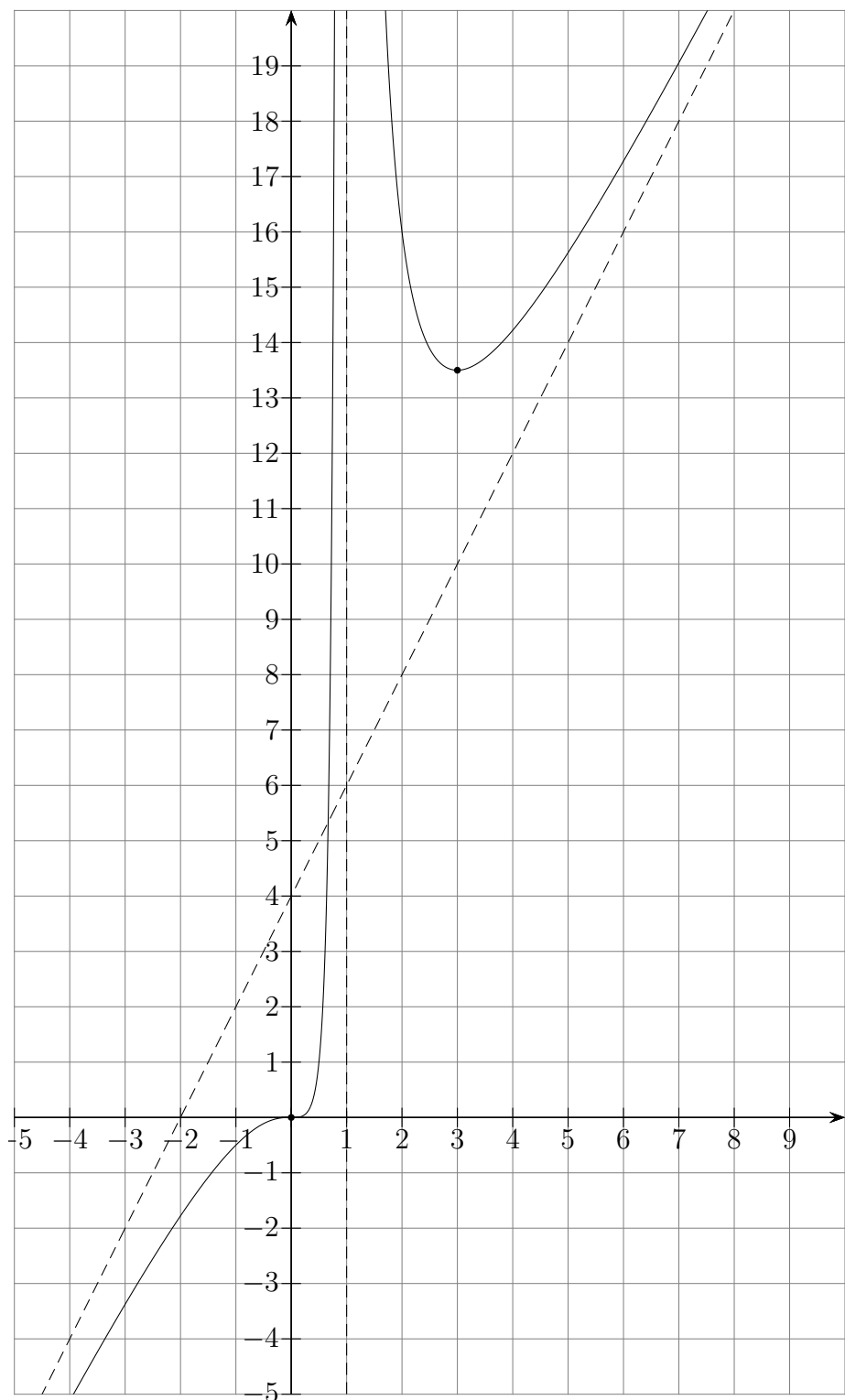
$$f'(x) = \frac{6x^2(x-1)^2 - 2x^3(2x-2)}{(x-1)^4} = \frac{6x^2(x-1) - 4x^3}{(x-1)^3} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$$

Elle s'annule si $x \in \{0; 3\}$, et f' n'est pas définie en $x = 1$. D'où le signe de f' et la croissance de f :

x	0			1			3		
$f'(x)$	+	0	+		-	0	+	+	+
$f(x)$									

On a $f(0) = 0$ et c'est le point $(0; 0)$ est un point à tangente de pente nulle.

On a $f(3) = 13, 5$, c'est le point $(3; 13, 5)$ est minimum local.



Corrige 2019 3Mr

Solution 2. (13 points)

Partie A

a) On a $f(x) = x^2(2 - \sqrt{x})$, donc les zéros de f sont 0 et 4.

b) L'aire du domaine vaut

$$\int_0^4 \left(2x^2 - x^{2+\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} \Big|_0^4 = \frac{128}{3} - \frac{256}{7} = \frac{128}{21} \cong 6,095$$

Partie B

a) On a $g(4) = 1$ et $h(4) = 1$, donc $(4; 1)$ est bien un point d'intersection des graphes.

De même $g(7) = 2$ et $h(7) = 2$ donc $(7; 2)$ est le deuxième point.

b) Le volume du solide vaut

$$\begin{aligned} \pi \int_4^7 \left(\frac{1}{9}(x-1)^2 - \frac{4}{8-x} \right) dx &= \pi \left(\frac{1}{27}(x-1)^3 + 4 \ln(|8-x|) \right) \Big|_4^7 \\ &= \pi(8 - 1 + 0 - 4 \ln(4)) = \pi(7 - 4 \ln(4)) \cong 4,57 \end{aligned}$$

Solution 3. (9 points)

a) On résout $e^{2x} = e^{-x}$, donc $3x = 0$ et $x = 0$. Ainsi $(0; 1)$.

On a $f'(x) = 2e^{2x}$, $f'(0) = 2$ (donc $(t_f) : y = 2x + 1$) et $g'(x) = -e^{-x}$, $g'(0) = -1$ (donc $(t_g) : y = -x + 1$).

Appelons α l'angle cherché, alors $\tan(\alpha) = \left| \frac{2 - (-1)}{1 - 2} \right| = |-3|$, donc $\alpha \cong 71,56^\circ$.

b) On veut que $f'(a) = -\frac{1}{g'(a)}$, donc $2e^{2a} = \frac{-1}{-e^{-a}}$, donc $e^a = \frac{1}{2}$ et ainsi $a = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cong -0,69$.

Solution 4. (10 points)

La contrainte est $x + y = 5$ ou $y = 5 - x$.

Le volume du solide est donné par $\pi \cdot (2x)^2 \cdot y + \frac{4}{2 \cdot 3} \cdot \pi \cdot x^3$.

La fonction à optimiser est donc $f(x) = 4\pi x^2(5 - x) + \frac{2\pi}{3}x^3$, donc $f(x) = \frac{\pi}{3}(60x^2 - 10x^3)$.

Sa dérivée vaut $f'(x) = \frac{10\pi}{3}(12x - 3x^2) = \frac{10\pi}{3}3x(4 - x)$.

Corrige 2019 3Mr

La croissance de f est la suivante (il faut que $x \in [0; +\infty[$).

x	0		4		
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

Le volume est donc maximum lorsque $x = 4$ et $y = 1$.

Solution 6 (15 points)

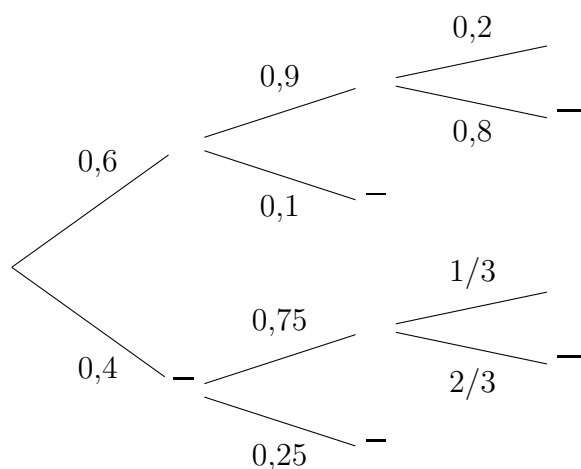
Partie A

a) On a $\frac{10}{3} = 120$.

b) C'est une permutation avec répétition : $\frac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$.

Partie B

On note l'événement "la saison a été favorable", : "les légumes ont bien poussés" et : "le voisin est venu chaparder".



c) $(\overline{\quad}) = 0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,25 = 16\%$.

d) $(\quad) = 0,6 \cdot 0,9 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,75 \cdot \frac{1}{3} = 20,8\%$.

e) $(\overline{\quad} | \overline{\quad}) = \frac{(\overline{\quad} \cap \overline{\quad})}{(\overline{\quad})} = \frac{0,4 \cdot 0,25}{0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,25} = 62,5\%$.

f) $(\quad) = 1 - 0,16 = \frac{21}{25}$ donc $p = \frac{10}{9} \left(\frac{21}{25}\right)^9 \cdot \left(\frac{4}{25}\right) + \left(\frac{21}{25}\right)^{10} \cong 50,8\%$.

Corrige 2019 3Mr

Solution 5 (11 points)

a) On a $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, par conséquent

$$(\alpha) : 2x + y + 4z = 28.$$

b) On a $(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$

c) Le rayon r de la sphère vaut $r = \delta(\alpha) = \frac{|20 - 2 + 52 - 28|}{\sqrt{21}} = \frac{42\sqrt{21}}{21} = 2\sqrt{21}$. Donc

$$(\Sigma_1) : (x - 10)^2 + (y + 2)^2 + (z - 13)^2 = 84$$

d) Appelons O_2 le centre de la sphère et posons $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Alors

$$\vec{MO_2} = \vec{MO} + \frac{\frac{1}{2}r}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$O_2(12; -1; 17) \text{ et } r_2 = \sqrt{21}.$$

Corrige 2019 3Mr

Solution 7. (17 points)

a) On calcule le déterminant de cette matrice

$$\det(M_k) = -4k(k+8) + 72 + 72 + 36k - 48 - 12(k+8) = -4k^2 - 8k = -4k(k+2)$$

Donc M_k n'est pas inversible si et seulement si $k \in \{0; -2\}$.

b) Si $k = 0$, la matrice n'est pas inversible. On a

$$\ker(M_0) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -2 \\ -18 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le noyau de M_0 est composé des vecteurs $(x; y; z)$ avec $2x - y - z = 0$ et $3y + z = 0$. En posant $y = k$, on en tire $z = -3k$ et $x = -k$. Par conséquent, le noyau de M_0 possède la base $\{(-1; 1; -3)\}$.

Par le théorème du rang, l'image de M_0 est de dimension 2, et elle est engendrée par les colonnes de M_0 . On peut choisir $\{(1; 0; 3), (1; -1; 4)\}$ comme base de l'image de M_0 .

c) On détermine le polynôme caractéristique de M :

$$\begin{aligned} p(x) &= \det \begin{pmatrix} -4-x & 2 & 2 \\ 6 & -x & -2 \\ -18 & 6 & 8-x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-x & 2-x & 0 \\ 6 & -x & -2 \\ -18 & 6 & 8-x \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1+ \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 2-x & 0 \\ 6+x & -x & -2 \\ -24 & 6 & 8-x \end{pmatrix} = -(2-x)((6+x)(8-x) - 48) = \\ &= (x-2)(-x^2 + 2x) = -x(x-2)^2 \end{aligned}$$

où la troisième matrice s'obtient en remplaçant le première colonne par cette colonne moins la deuxième colonne. Les valeurs propres sont donc 0 et 2.

Nous savons déjà que $E_0 = \ker(M_0) = \langle(-1; 1; -3)\rangle$.

Calculons

$$E_2 = \ker \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & -2 \\ -18 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc E_2 correspond au plan d'équation $3x - y - z = 0$. En posant $x = k$ et $y = l$, nous avons alors $(x; y; z) = k(1; 0; 3) + l(0; 1; -1)$, donc $E_2 = \langle(1; 0; 3), (0; 1; -1)\rangle$.

$$\text{Par conséquent, } E_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

d) Si v est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ , alors

$$M^4 v = M^3 \lambda v = M^2 \lambda^2 v = M \lambda^3 v = \lambda^4 v$$

donc v est un vecteur propre de M^4 associé à la valeur propre λ^4 . Par conséquent, les espaces propres de M^4 sont les mêmes que ceux de M mais pour les valeurs propres 0 et 16 respectivement. Plus précisément, $E_0 = \langle(-1; 1; -3)\rangle$ et $E_{16} = \langle(1; 0; 3), (0; 1; -1)\rangle$.

Solution 1. (16 points)

f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et f s'annule si $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}$ puisque $e^x > 0$
D'où le signe de f :

x	0		2		
$f(x)$	-	0	+	0	-

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - x^2) e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - 2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{e^{-x}} = -0$$

Donc la fonction f admet la droite $y = 0$ comme asymptote horizontale à gauche.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - x^2) e^x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - x^2) e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) e^x = -\infty$$

Donc la fonction f n'admet aucune asymptote à droite : ni horizontale ni oblique.

$$f'(x) = (2 - 2x) e^x + (2x - x^2) e^x = (2 - x^2) e^x$$

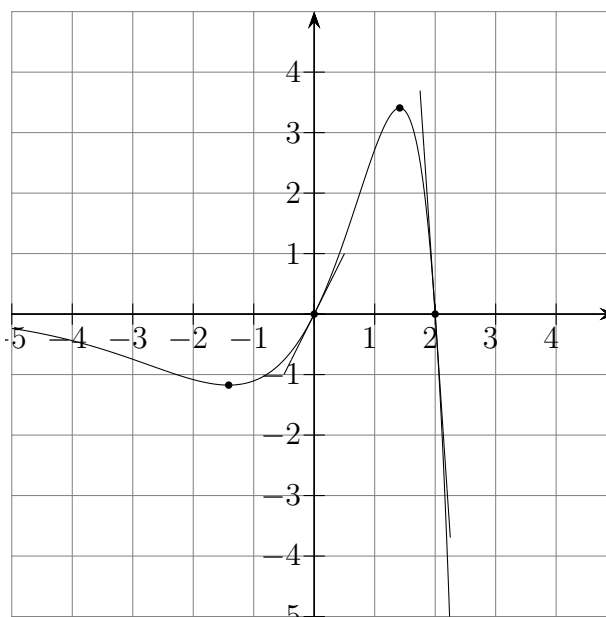
f' s'annule si $x = \pm\sqrt{2}$. D'où le signe de f' et la croissance de f :

x	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

$f(-\sqrt{2}) = (-2\sqrt{2} - 2) e^{-\sqrt{2}} \simeq -1.174$ c'est un minimum local.

$f(\sqrt{2}) = (2\sqrt{2} - 2) e^{\sqrt{2}} \simeq 3.408$ c'est un maximum local.

On peut encore calculer $f'(0) = 2$ et $f'(2) \simeq -14.778$.



Corrige 2018 3Mr

Solution 2. (10 points)

a) $f(0) = 2 > g(0) = 1$ donc le graphe no 1 est celui de f .

$$\text{b) } \cos(2x) + 1 = \sqrt{3} \sin(2x) + 1 \Leftrightarrow \tan(2x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \simeq 1.866 \text{ d'où } A(0.262; 1.866)$$

$$f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \simeq 0.134 \text{ d'où } B(1.833; 0.134)$$

c) La région se situe entre les points A et B. Le graphe de f se situe au-dessus de celui de g .

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3} \sin(2x) - \cos(2x) dx &= \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2} \sin(2x) \right] \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\pi) - \frac{1}{2} \sin(\pi) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \simeq 1.366 \end{aligned}$$

Solution 3. (10 points)

$$\text{Contrainte } 2x \cdot y = 11200 \text{ ou } y = \frac{5600}{x}$$

$$\text{Longueur du barbelé } 3(2x + 2y) + 2x + y = 8x + 7y$$

$$\text{Fonction à optimiser } f(x) = 8x + \frac{39200}{x}$$

$$\text{Dérivée } f'(x) = 8 - \frac{39200}{x^2} = \frac{8(x^2 - 4900)}{x^2}$$

Croissance pour $x \in]0; +\infty[$

x	-70	0	70
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$		↘ ↗	

Minimum lorsque $x = 70$ et $y = 80$.

L'éleveur utilise le moins de barbelé lorsque les dimensions des enclos sont de 70 m sur 80 m.

Solution 4. (10 points)

$$\text{a) } \frac{\begin{array}{r} x^2 \\ -x^2 \quad -x \\ \hline x \quad +1 \\ \hline 1 \end{array}}{\quad} \left| \begin{array}{r} x+1 \\ \hline x-1 \end{array} \right. \quad \text{d'où } f(x) = \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$f(1) = \frac{1}{2}$ et $f'(1) = \frac{3}{4}$ d'où l'équation de la tangente

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(x - 1) \Leftrightarrow 3x - 4y - 1 = 0$$

Solution 5. (19 points)

$$\text{a) } \begin{cases} x = 4k - 12 \\ y = k \\ z = 3k + 3 \\ 5x - 8y - 17z + 189 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4k - 12 \\ y = k \\ z = 3k + 3 \\ 20k - 60 - 8k - 51k - 51 + 189 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4k - 12 \\ y = k \\ z = 3k + 3 \\ -39k + 78 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ z = 9 \\ k = 2 \end{cases} \quad \text{d'où } D(-4; 2; 9)$$

$$\text{b) vecteur normal } \overrightarrow{CR} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ point milieu } M(9; -2; -4) \text{ d'où}$$

$$\mu : x + z = 5$$

$$\text{c) } \delta(C; \alpha) = \frac{|20 + 16 + 153 + 189|}{\sqrt{25 + 64 + 289}} = \frac{378}{\sqrt{378}} = \sqrt{378}$$

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 96 \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{d}\| = \sqrt{36 + 9216 + 576} = \sqrt{9828}$$

$$\delta(C; b) = \frac{\|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{d}\|}{\|\overrightarrow{d}\|} = \frac{\sqrt{9828}}{\sqrt{16 + 1 + 9}} = \sqrt{378}$$

$$\Sigma : (x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z + 9)^2 - 378 = 0$$

d) plans $\pi : 4x + y + 3z + d = 0$ avec $\delta(C; \pi) = \sqrt{378} \Leftrightarrow \frac{|16 - 2 - 27 + d|}{\sqrt{16 + 1 + 9}} = \sqrt{378}$

$$\Leftrightarrow d - 13 = \pm\sqrt{9828} \text{ et } 4x + y + 3z + 13 \pm \sqrt{9828} = 0$$

e) La perpendiculaire à α par C coupe α en

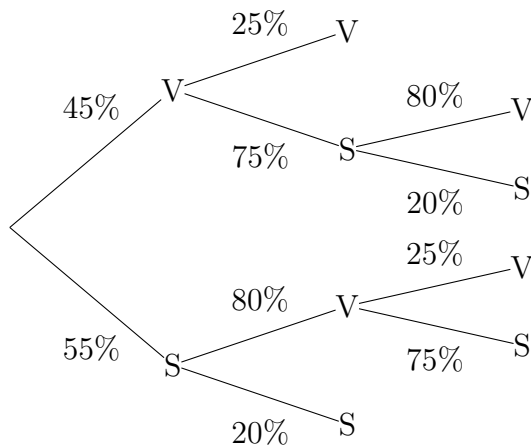
$$\begin{cases} x = 5k + 4 \\ y = -8k - 2 \\ z = -17k - 9 \\ 5x - 8y - 17z + 189 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5k + 4 \\ y = -8k - 2 \\ z = -17k - 9 \\ 25k + 20 + 64k + 16 + 289k + 153 + 189 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5k + 4 \\ y = -8k - 2 \\ z = -17k - 9 \\ 389k + 389 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \\ z = 8 \\ k = -1 \end{cases} \text{ d'où } I(-1; 6; 8)$$

et le symétrique $S(-6; 14; 25)$

Solution 6. (15 points)

a)



b) $P(VV) = 0.45 \cdot 0.25 = 11.25\%$

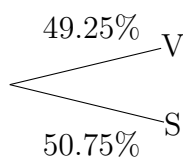
c) $P(VV \cup VSV \cup SVV) = 0.45 \cdot 0.25 + 0.45 \cdot 0.75 \cdot 0.8 + 0.55 \cdot 0.8 \cdot 0.25 = 49.25\%$

d) $P(VV \cup SS) = 0.45 \cdot 0.25 + 0.55 \cdot 0.2 = 22.25\%$

e) $P(SVV \cup SVS \cup SS | VSS \cup SVS \cup SS) = \frac{P(SVS \cup SS)}{P(VSS \cup SVS \cup SS)}$

$$= \frac{0.55 \cdot 0.8 \cdot 0.75 + 0.55 \cdot 0.2}{0.45 \cdot 0.75 \cdot 0.2 + 0.55 \cdot 0.8 \cdot 0.75 + 0.55 \cdot 0.2} = \frac{0.44}{0.5075} = 86.7\%$$

f)



$$P(5V7S) = \frac{12!}{7! \cdot 5!} \cdot 0.4925^5 \cdot 0.5075^7 = 19.9\%$$

Solution 7. (20 points)

$$\text{a) } \det(M) = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-x & -1 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x(1-x)$$

M est inversible si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

$$\text{b) Dans ce cas, la matrice } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est de rang 2 et } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est une base de l'image.}$$

$$\text{c) } \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)(1+\lambda)$$

La matrice A admet les valeurs propres $\lambda = 0; 1; -1$.

d) La matrice A^2 admet les valeurs propres $\lambda = 0; 1$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_0 = \ker(A^2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$E_1 = \ker(A^2 - I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

La matrice A est diagonalisable car $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de vecteurs propres.

$$\text{e) } A^4 = A^{2018} = A^2$$

$$\text{car } A^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$