

Problème 1

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{4x^2 + 5x}$$

$$D_f : 4x^2 + 5x = x(4x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{5}{4}$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{4}; 0 \right\}$$

$$Z_f = \emptyset, \quad f(x) \Big|_{-\frac{5}{4}}^0 + \Big|_0^{\frac{5}{12}} + \dots \quad \text{car } e^{3x} > 0 \text{ pour tout } x.$$

$$\text{AV: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -5/4} \frac{e^{-15/4}}{0} = \infty$$

donc il y a des AV en $x = 0$ et $x = -\frac{5}{4}$.

AH: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0}{\infty} = 0$ donc il y a une AH à gauche d'équation $y = 0$.

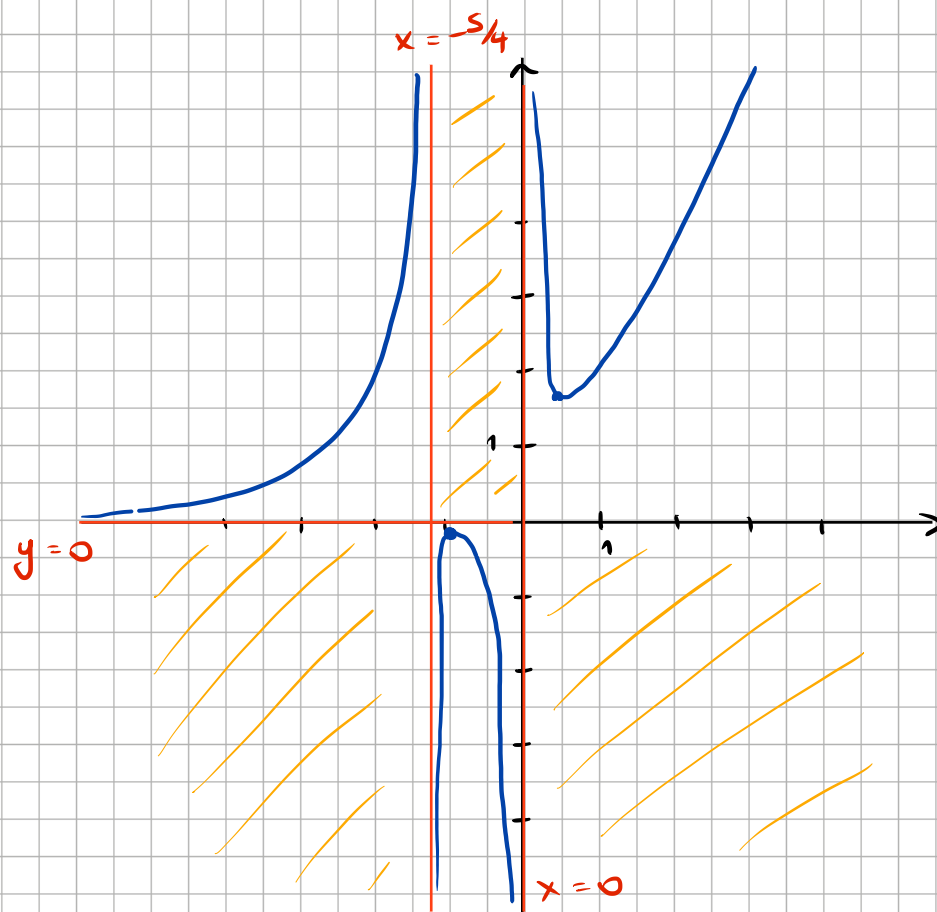
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{3x}}{8x + 5} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9e^{3x}}{8} = \infty \quad \text{donc pas d'AH à droite.}$$

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}(4x^2 + 5x) - e^{3x}(8x + 5)}{(4x^2 + 5x)^2} = \frac{e^{3x}(12x^2 + 15x - 8x - 5)}{(4x^2 + 5x)^2} = \frac{e^{3x}(12x^2 + 7x - 5)}{(4x^2 + 5x)^2}$$

$$\text{Zéros de } f' : \Delta = 49 + 240 = 289, \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm 17}{24} \begin{matrix} \nearrow 5/12 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

	$-\frac{5}{4}$	-1	0	$\frac{5}{12}$		
e^{3x}	+	+	+	+	+	
$12x^2 + 7x - 5$	+	+	0	-	0	+
$(4x^2 + 5x)^2$	+	+	+	0	+	+
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
			max		min	

On a un maximum en $m(-1; -0,05)$ et un minimum en $m(\frac{5}{12}; 1,26)$.
 $\approx 0,42$



Problème 2

a) $V = \text{base} \cdot \text{hauteur} = (24 - 4) \left(\frac{45}{2} - 2 \right) \cdot 2 = 820$

b)
$$V(x) = (24 - 2x) \cdot \left(\frac{45}{2} - x \right) \cdot x = (540 - 45x - 24x + 2x^2)x$$

$$= 2x^3 - 69x^2 + 540x$$

c) On calcule $V'(x) = 6x^2 - 138x + 540 =$

$$= 6 \left(x^2 - 23x + 90 \right) = 0$$

$$\Delta = 169, x_{1,2} = \frac{23 \pm 13}{2} \rightarrow \begin{matrix} 18 \\ 5 \end{matrix}$$

et x doit être ≤ 12
donc $x = 18$ n'est
pas admissible

Valeurs admissibles : $0 \leq x \leq 12$

$V(x)$ est maximum & $x = 5$ cm.

	x_2	10	x_1
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

Problème 3

a) $f(x) = x + \frac{5}{x} > 0$ si $x > 0$

On a $f(x) = 6 \Leftrightarrow x^2 + 5 = 6x \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 6x + 5}_{(x-5)(x-1)} = 0$

On a $f(2) = \frac{9}{2} < 6$ donc

$$A = \int_1^5 \left(6 - x - \frac{5}{x}\right) dx = 6x - \frac{1}{2}x^2 - 5\ln(|x|) \Big|_1^5$$

$$= 30 - \frac{25}{2} - 5\ln(5) - 6 + \frac{1}{2} = 12 - 5\ln(5) \approx 3,95$$

b) $V = \pi \int_1^2 \underbrace{\left(x + \frac{5}{x}\right)^2}_{x^2 + 10 + \frac{25}{x^2}} dx = \pi \int_1^2 \left(x^2 + 10 + \frac{25}{x^2}\right) dx$

$$= \pi \left(\frac{1}{3}x^3 + 10x - \frac{25}{x} \right) \Big|_1^2 =$$

$$= \pi \left(\frac{8}{3} + 20 - \frac{25}{2} - \frac{1}{3} - 10 + 25 \right) = \frac{149\pi}{6}$$

($\approx 78,02$)

c) L'équation de l'AO est $y = x$

(Avec une division euclidienne, $f(x) = \frac{x^2+5}{x}$

$\begin{array}{r} x^2 + 5 \\ -x^2 \\ \hline 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} x \\ \hline x \end{array}$	donc $y = x$)
--	--	---------------------------------

Problème 4

a) On a $\frac{\ln(1)}{1} = 0$ et $\frac{1}{1} - 1 = 0$ donc les deux courbes se coupent en $(1; 0)$.

De plus, $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

qui vaut 1 si $x=1$ et $\left(\frac{1}{x} - 1\right)' = -\frac{1}{x^2}$ qui

vaut -1 si $x=1$. Donc les deux courbes se coupent bien à angle droit en $(1; 0)$.

b) $\Gamma_1: (x-3)^2 + (y-5)^2 = \underbrace{2+9+25}_{36}$
donc $C_1(3; 5)$, $r_1 = 6$

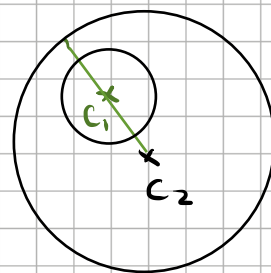
$\Gamma_2: (x-5)^2 + (y-8)^2 = 2^2$, $C_2(5; 8)$ et $r_2 = 2$

$\overrightarrow{C_1 C_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{C_1 C_2}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3,6$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{C_1 C_2}\| < \widetilde{r_1 - r_2}^4$ donc

C_2 est intérieur à C_1

↳ ils sont donc disjointes.



Problème 5

a) $C(-4; 0) \quad r = \sqrt{800} = 10\sqrt{8} = 20\sqrt{2}$

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $d_{AB}: x + 7y = 196$

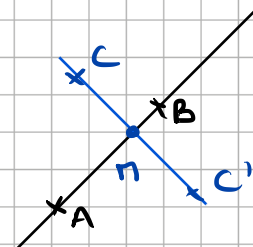
$d_{CC'}: 7x - y = -28$

m: $\begin{cases} x + 7y = 196 \\ 7x - y = -28 \end{cases}$

soit $x = 0, x = 0, y = 28$

donc $M(0; 28)$ et $\vec{OC'} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\underbrace{\vec{CM}}_{\begin{pmatrix} 4 \\ 28 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 56 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C'(4; 56)$



c) $A = \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{CM}\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{4^2 + 28^2} = 100$

d) On a $\|\vec{CA}\| = \left\| \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1250} \approx 35,4 > 28,3 \approx \sqrt{800}$

Posons $(t): y = mx + h, A \in t: h = 25 - 21m$

et $\sqrt{800} = d(C; t) = \frac{|-4m + h|}{\sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow$

$\underbrace{(-4m + 25 - 21m)^2}_{25^2(1-m)^2} = 800(m^2 + 1)$

$625(1 - 2m + m^2) = 800(m^2 + 1) \quad | : 25$

$25(1 - 2m + m^2) = 32(m^2 + 1)$

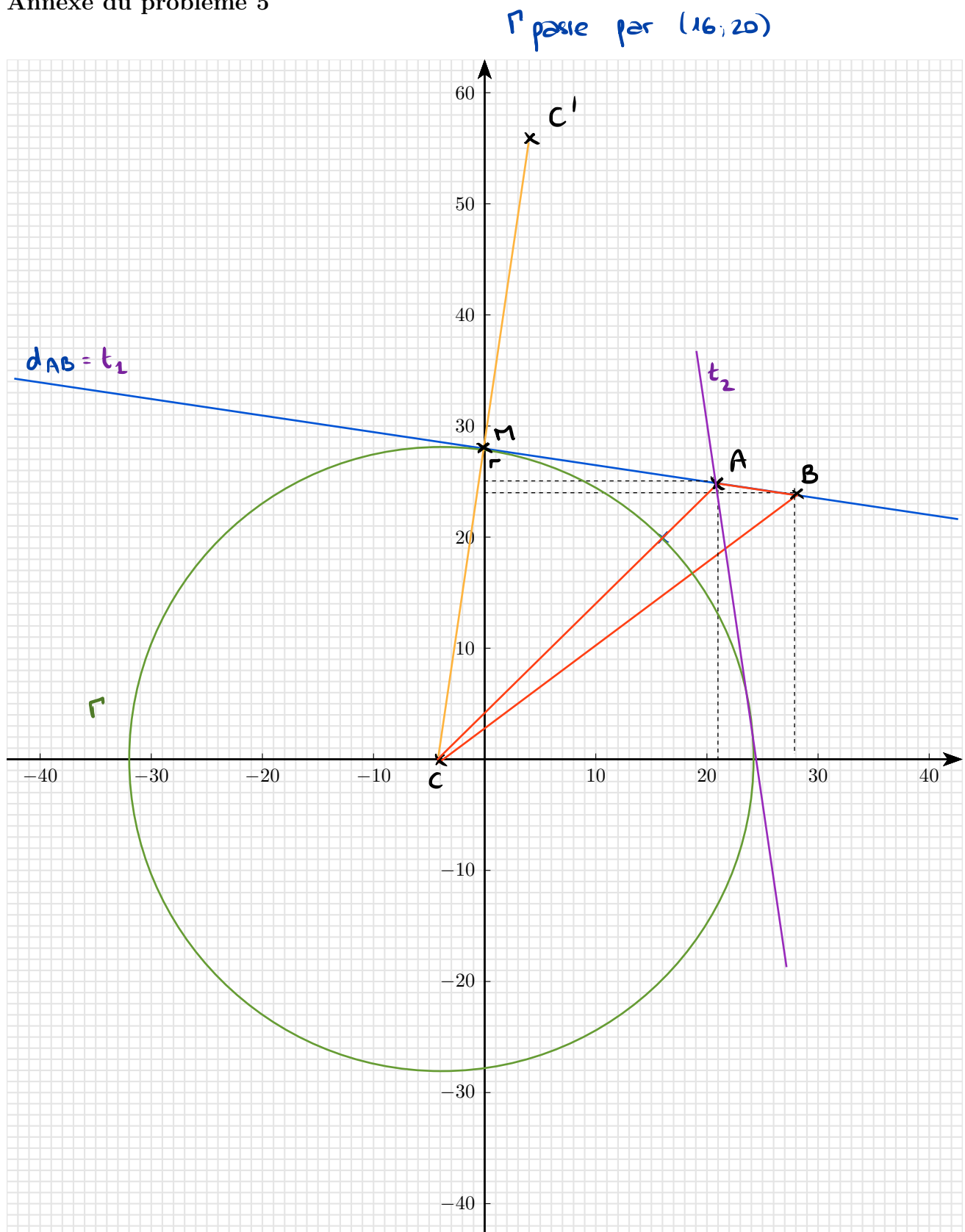
$7m^2 + 50m + 7 = 0, \Delta = 2304 = 48^2, m_{1,2} = \frac{-50 \pm 48}{14} \begin{matrix} \nearrow -1/7 \\ \searrow -7 \end{matrix}$

$\Rightarrow (t_1): y = -\frac{1}{7}x + 28 \Leftrightarrow x + 7y = 196$ c'est d_{AB} .

$\Rightarrow (t_2): y = -7x + 172$

Nom, prénom : _____

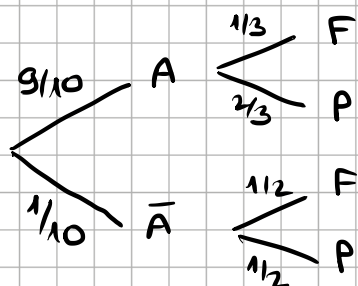
Annexe du problème 5



Probleme 6

$$a) p(7P \text{ et } 2F) = C_2^9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{512}{2187} \approx 23,41\%$$

$$b) A = \text{la pièce est pipée} \quad p(F) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{20} = 35\%$$



$$p(\bar{A} | F) = \frac{p(\bar{A} \cap F)}{p(F)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{7} \approx 14,29\%$$

c) On a 2 cas : i) les deux pièces sont pipées

ii) l'une est pipée et l'autre équilibrée.

$$\left. \begin{aligned} i) \quad p &= \frac{C_2^9}{C_2^{10}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{45} \approx 35,56\% \\ ii) \quad p &= \frac{C_1^9 \cdot C_1^1}{C_2^{10}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{15} \approx 6,67\% \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{donc la prob.} \\ &\text{cherchée vaut} \\ &42,22\% = \frac{19}{45} \end{aligned}$$

Ex. 1

a) $f(x) = \frac{3x(x^2-2)}{x^2-3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$, $Z = \{0, \pm\sqrt{2}\}$

	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$3x$	-	-	-	+	+
x^2-2	+	+	0	-	-
x^2-3	+	0	-	-	0
$f(x)$	-	+	0	-	+

C'est une fonction impaire: $f(-x) = -f(x)$

AV: $\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{3}} f(x) = \frac{\pm 3\sqrt{3}}{0} = \pm\infty$, il y a des AV d'équation $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$.

Vu les degrés, il y a une AO:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 6x & x^2 - 3 \\ - (3x^3 - 9x) & \\ \hline 3x & \end{array}$$

L'éq. de l'AO est $y = 3x$
 or $S(x) = \frac{3x}{x^2-3}$

Le graphe de f coupe l'AO en $P(0;0)$

b) $f'(x) = \frac{3(3x^2-2)(x^2-3) - (3x^3-6x) \cdot 2x}{(x^2-3)^2} =$
 $= \frac{3(3x^4 - 11x^2 + 6) - 3(2x^4 - 4x^2)}{(x^2-3)^2} = \frac{3(x^4 - 7x^2 + 6)}{(x^2-3)^2}$

c)

	$-\sqrt{6}$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$
$3(x^2-6)$	+	0	-	-	-	0
x^2-1	+	+	0	0	+	+
$(x^2-3)^2$	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0
$f(x)$	↗	↘	↘	↗	↘	↗
	max		min	max		min

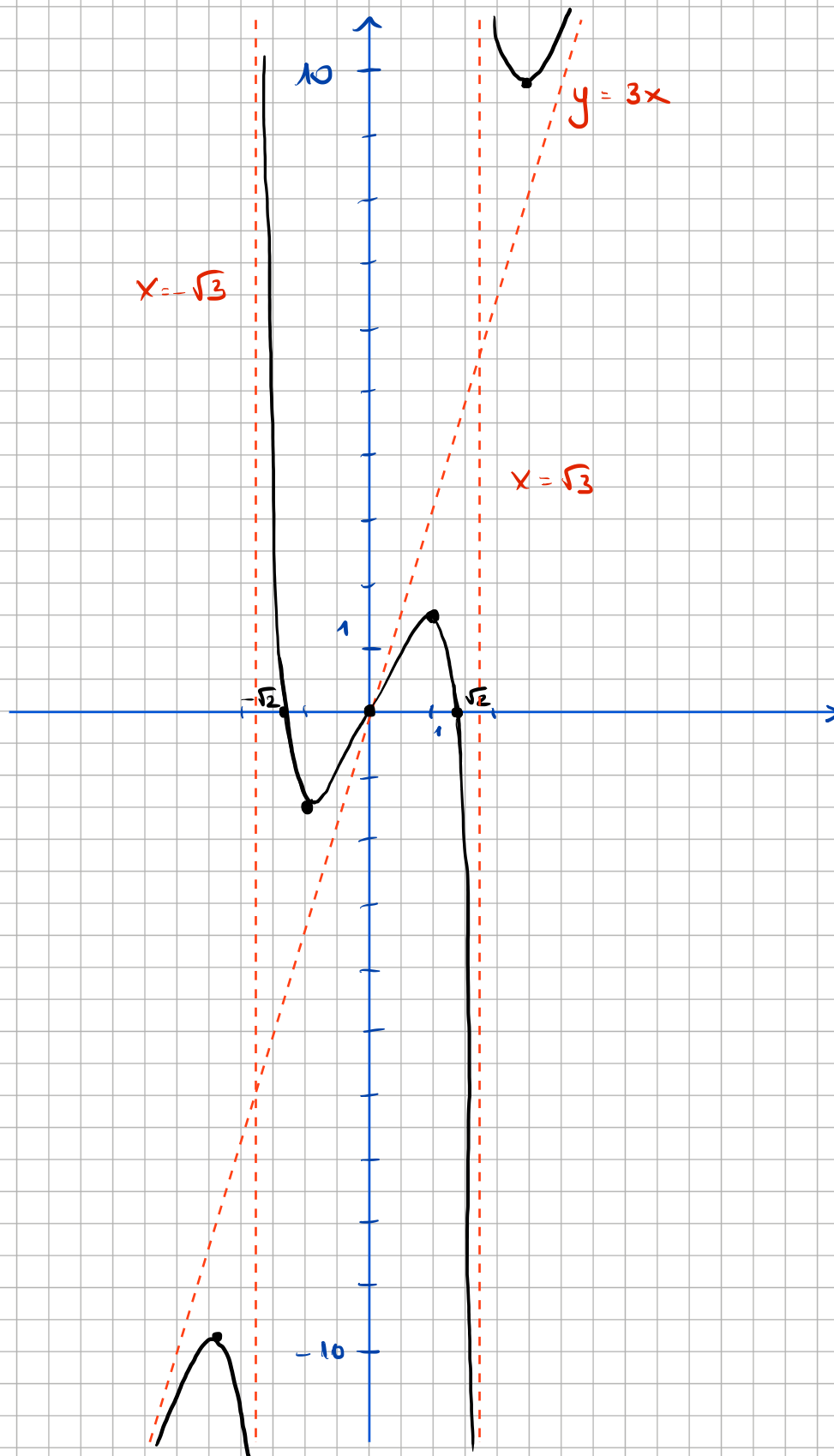
Max $(-\sqrt{6}; -4\sqrt{6})$
 $\approx -2,45$ $\approx -9,8$

Min $(\sqrt{6}; +4\sqrt{6})$

Min $(-1; -1,5)$

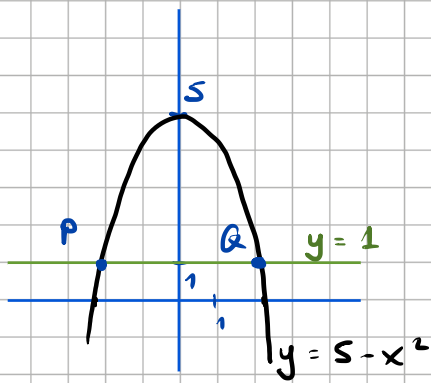
Max $(1; 1,5)$

d)



Ex. 2

b.)



La courbe $y = 5 - x^2$ est une parabole concave de sommet $S(0; 5)$.

Les points P et Q ont pour abscisses les x tels que $5 - x^2 = 1$ donc $x^2 = 4$ et $x = \pm 2$.

Ainsi $P(-2; 1)$ et $Q(2; 1)$.

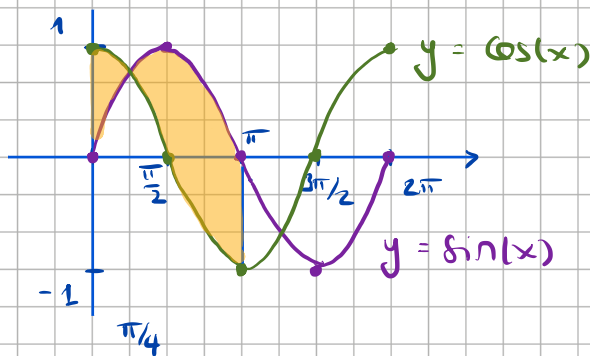
La courbe $y = 5 - x^2$ est au-dessus de $y = 1$ entre -2 et 2 .

$$\text{Donc } V = \pi \int_{-2}^2 ((5 - x^2)^2 - 1) dx \quad (\text{ou } 2\pi \int_0^2 ((5 - x^2)^2 - 1) dx)$$

$$= \pi \int_{-2}^2 (x^4 - 10x^2 + 24) dx = \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 24x \right) \Big|_{-2}^2$$

$$= \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{80}{3} + 48 \right) \cdot 2 = \pi \cdot \frac{416}{15} \cdot 2 = \frac{832\pi}{15} \approx 174,25$$

a.)



$$\sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow$$

$$\tan(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \sin(x)) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin(x) - \cos(x)) dx =$$

$$= (\sin(x) + \cos(x)) \Big|_0^{\pi/4} + (-\cos(x) - \sin(x)) \Big|_{\pi/4}^{\pi} =$$

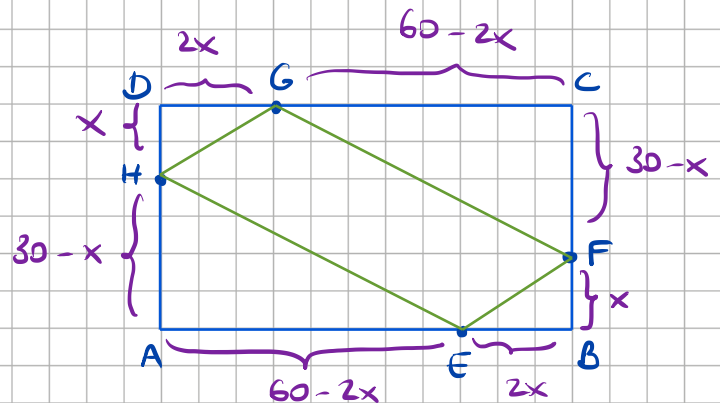
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 + 1 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$$

Ex 3

L'aire du parallélogramme EFGH s'obtient en enlevant à l'aire du rectangle ABCD les aires des quatre triangles rectangles.

Donc

$$f(x) = 60 \cdot 30 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x + \\ - 2 \cdot \frac{1}{2} (60 - 2x)(30 - x)$$



$$\Rightarrow f(x) = 1800 - 2x^2 - (1800 - 120x + 2x^2) \\ = -4x^2 + 120x$$

Les valeurs admissibles pour x sont $[0; 30]$.

On a $f'(x) = -8x + 120$ qui s'annule en $x = 15$, qui est positive avant 15 et négative après.

L'aire est donc maximale pour $x = 15$ et vaut alors 900.

f) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $(AB): 3x - 7y = 5$.

g) On a $(t): 3x - 7y + c = 0$ et $\sqrt{58} = \frac{|3 - 7 \cdot 8 + c|}{\sqrt{58}}$

donc $|c - 53| = 58$ donc $c - 53 = \pm 58$

Avec le "-", on retrouve (AB) et donc

$$(t): 3x - 7y + 111 = 0.$$

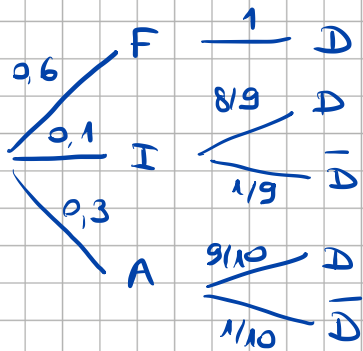
h) $ABTF$ est un rectangle, en effet $(AB) \perp (AD)$ vu leurs équations. Son aire vaut $2r^2 = 2 \cdot 58 = 116$.

En effet, $AB = d(C; (AD)) = r$ et $\|\vec{AF}\| = \|\vec{BT}\| = 2r$.

Ex 5

Corrige 2021 3Ms

- a) On note F = "un seul chiffre faux", I = "inversion de deux chiffres", A = "ajout ou soult d'un chiffre".
Puis D = "le def de contrôle détecte l'erreur".



$$b) p(D) = 0,6 + 0,1 \cdot \frac{8}{9} + 0,3 \cdot \frac{9}{10} = \frac{863}{900} \approx 95,89\%$$

- c) C'est une prob. conditionnelle :

$$p(F | D) = \frac{p(F \cap D)}{p(D)} =$$

$$= \frac{0,6 \cdot \frac{1}{900}}{863/900} = \frac{540}{863} \approx 62,57\%$$

$$d) p(D | \bar{A}) = \frac{p(D \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{0,6 + 0,1 \cdot \frac{8}{9}}{0,6 + 0,1} = \frac{62}{63} \approx 98,41\%$$

$$e) p(8 \text{ CB détectés}) = C_8^{10} \left(\frac{863}{900} \right)^8 \cdot \left(\frac{37}{900} \right)^2 \approx 5,44\%$$

$$f) p(\bar{D} \text{ sur au moins un}) = 1 - p(10 \text{ CB détectés}) = 1 - \left(\frac{863}{900} \right)^{10} \approx 34,28\%$$

22) Problème 1

$$f(x) = \left(27 \cdot \left(\frac{5}{x^4} - \frac{30}{x^6} \right) \right) = \frac{135(x^2 - 6)}{x^6}$$

a) zeros : $\{\pm\sqrt{6}\}$ $\text{ED } f = \mathbb{R}^*$

$135(x^2 - 6)$	$+$	0	$-$	0	$+$
x^6	$+$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

f est une fonction paire)

AV : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, AV : $x = 0$

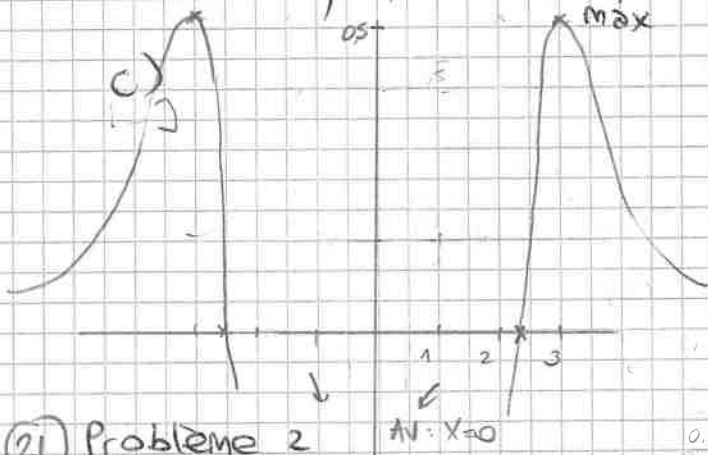
AH : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, AH : $y = 0$ (les intersections de

l'AH avec le graphe sont les zeros)

b) $f'(x) = \frac{135 \cdot 2x \cdot x^6 - 135(x^2 - 6) \cdot 6x^5}{x^{12}} = \frac{540(9 - x^2)}{x^7}$

$540(9 - x^2)$	$-$	0	$+$	0	$-$
x^7	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$

f' est une fonction impaire)
 Max en $(-3; \frac{5}{9})$ et en $(3; \frac{5}{9})$



d) $P(1; -675)$

$f'(1) = 4320$

(+) : $y = 4320x - 4995$

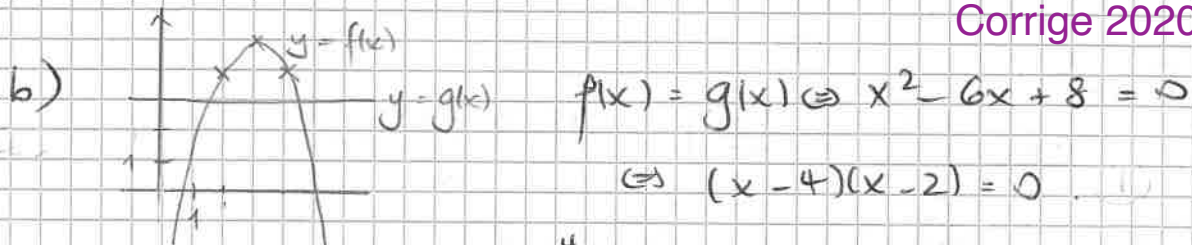
21) Problème 2

a) Div. euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 6x^2 + x + 1 & 2x + 1 \\ - (6x^2 + 3x) & 3x - 1 \\ \hline -2x + 1 & \\ - (-2x - 1) & \\ \hline 2 & \end{array}$$

donc $\int \frac{6x^2 + x + 1}{2x + 1} dx = \int \left(3x - 1 + \frac{2}{2x + 1} \right) dx =$

$$= \frac{3}{2}x^2 - x + \ln(|2x + 1|) + C.$$



Vu le dessin, $A = \int_2^4 (-x^2 + 6x - 4 - 4) dx =$
 $= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x \right) \Big|_2^4 = -\frac{64}{3} + 48 - 32 + \frac{8}{3} - 12 + 16 = \frac{4}{3}$

c) On résout $\cos(3x + \pi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3x + \pi = \frac{\pi}{3} + k_1 \cdot 2\pi \\ 3x + \pi = -\frac{\pi}{3} + k_2 \cdot 2\pi, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = \\ = -3 \sin(3x + \pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + k_1 \cdot \frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{4\pi}{9} + k_2 \cdot \frac{2\pi}{3} \end{cases} k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x/2}}{\ln(x+1)} = \frac{0}{0} \stackrel{BH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} e^{-x/2}}{1/(x+1)} = \frac{1}{2}$

17) Probleme 3

a) $M_{AB} \left(-\frac{13}{2}; \frac{11}{2} \right)$, $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(m_{AB}) : x + y = -1$.

b) $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 18 \\ -24 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \perp \vec{v}_d = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

et $M_{BC}(18; 9) \in n$ car $18 = 10 + 4 \cdot 2$, $9 = 3 + 3 \cdot 2$.

c) On calcule $m_{AB} \cap m_{BC}$:

$10 + 4k + 3 + 3k = -1$, donc $7k = -14$, $k = -2$.

Ainsi $C_1(2; -3)$ et $(\gamma) : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 625$
 $\vec{PA} \perp \vec{CA}$

d) On résout $\frac{(8+4k)^2}{16(2+k)^2} + \frac{(6+3k)^2}{9(2+k)^2} = 625$

donc $25(2+k)^2 = 625 \Rightarrow (2+k)^2 = 25$

Donc $2+k = \pm 5 : k = 3$ ou -7 . $P(22; 12)$ et $Q(-18; -18)$.

e) $\frac{x-y+12}{\sqrt{2}} = \pm \frac{x-7y-48}{5\sqrt{2}} \quad | \cdot 5\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow$

$5(x-y+12) = \pm (x-7y-48)$

$\oplus (b_1) : 4x + 2y + 108 = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 54 = 0$

$\ominus (b_2) : 6x - 12y + 12 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0$

f)

$P(22, 12) \in b_2$ car $22 - 2 \cdot 12 + 2 = 0$.

11) Probleme 4

Volume : $x^2 y$

Contrainte : $360(2x^2 + 2xy) + 240xy = 54'000 \quad | : 240$

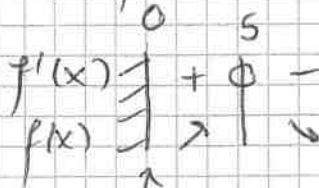
$3x^2 + 3xy + xy = 225 \quad \Leftrightarrow$

$3x^2 + 4xy = 225$

Donc $y = \frac{225 - 3x^2}{4x} = \frac{225}{4x} - \frac{3}{4}x$

On veut maximiser $f(x) = \frac{225}{4} \cdot x - \frac{3}{4}x^3$

On a $f'(x) = \frac{225}{4} - \frac{9}{4}x^2$ qui s'annule en $x = \pm 5$



Le volume est donc

maximal pour $x = 5m$, $y = 7,5m$

↑
Valeurs admissibles : $x, y \geq 0$

⑬ Problème 5

$$a) P(3 \text{ épicéas}) = 0,44^3 \approx 8,52\%$$

$$b) \text{ Il y a } 100 - 44 - 18 - 15 = 23\% \text{ de telles espèces.}$$

$$\text{Donc } p = (0,23)^7 \approx 0,0034\% < 0,01\%.$$

$$c) p = 1 - (1 - 0,18)^5 \approx 62,93\%$$

$$d) C_2^5 \cdot C_1^3 \cdot C_2^2 = 0,44^2 \cdot 0,18 \cdot 0,15^2 \approx 2,35\%$$

$$e) p(\text{sapin} | \text{sapin ou épicéa}) = \frac{0,15}{0,15 + 0,44} \approx 25,42\%$$

Corrige 2019 3Ms

Solution 1. (18 points)

La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et f s'annule si $2x^3 = 0$, donc en $x = 0$.

Le signe de f est le suivant

x	0			1		
$f(x)$	-	0	+		-	+

S'il y a une AV, c'est en $x = 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3}{(x-1)^2} = \infty$, la fonction f admet la droite $x = 1$ comme asymptote verticale.

Comme le numérateur est de degré un de plus que le dénominateur, il y a une AO (que l'on peut obtenir par division euclidienne par exemple), d'équation $y = 2x + 4$.

La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = \frac{6x^2(x-1)^2 - 2x^3(2x-2)}{(x-1)^4} = \frac{6x^2(x-1) - 4x^3}{(x-1)^3} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$$

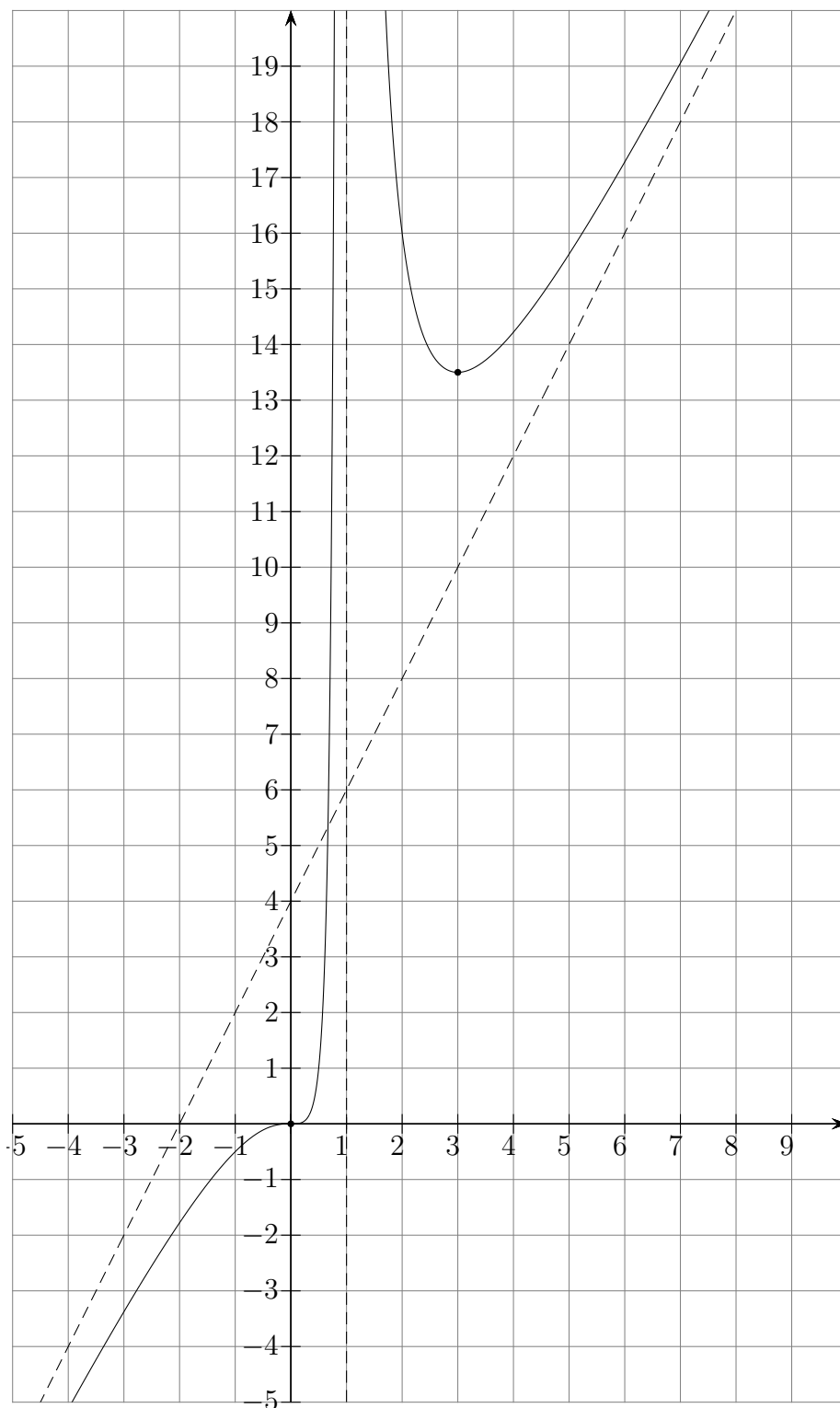
Elle s'annule si $x \in \{0; 3\}$, et f' n'est pas définie en $x = 1$. D'où le signe de f' et la croissance de f :

x	0			1			3		
$f'(x)$	+	0	+		-	0	+	+	+
$f(x)$									

On a $f(0) = 0$ et c'est le point $P(0; 0)$ est un point à tangente de pente nulle.

On a $f(3) = 13, 5$, c'est le point $M(3; 13, 5)$ est minimum local.

Corrige 2019 3Ms



Corrige 2019 3Ms

Solution 2. (13 points)

Partie A

a) On a $f(x) = x^2(2 - \sqrt{x})$, donc les zéros de f sont 0 et 4.

b) L'aire du domaine vaut

$$\int_0^4 \left(2x^2 - x^{2+\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} \Big|_0^4 = \frac{128}{3} - \frac{256}{7} = \frac{128}{21} \cong 6,095$$

Partie B

a) On a $g(4) = 1$ et $h(4) = 1$, donc A(4; 1) est bien un point d'intersection des graphes.

De même $g(7) = 2$ et $h(7) = 2$ donc B(7; 2) est le deuxième point.

b) Le volume du solide vaut

$$\begin{aligned} \pi \int_4^7 \left(\frac{1}{9}(x-1)^2 - \frac{4}{8-x} \right) dx &= \pi \left(\frac{1}{27}(x-1)^3 + 4 \ln(|8-x|) \right) \Big|_4^7 \\ &= \pi(8 - 1 + 0 - 4 \ln(4)) = \pi(7 - 4 \ln(4)) \cong 4,57 \end{aligned}$$

Solution 3. (9 points)

a) On résout $e^{2x} = e^{-x}$, donc $3x = 0$ et $x = 0$. Ainsi P(0; 1).

On a $f'(x) = 2e^{2x}$, $f'(0) = 2$ (donc $(t_f) : y = 2x + 1$) et $g'(x) = -e^{-x}$, $g'(0) = -1$ (donc $(t_g) : y = -x + 1$).

Appelons α l'angle cherché, alors $\tan(\alpha) = \left| \frac{2 - (-1)}{1 - 2} \right| = |-3|$, donc $\alpha \cong 71,56^\circ$.

b) On veut que $f'(a) = -\frac{1}{g'(a)}$, donc $2e^{2a} = \frac{-1}{-e^{-a}}$, donc $e^a = \frac{1}{2}$ et ainsi $a = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cong -0,69$.

Solution 4. (10 points)

La contrainte est $x + y = 5$ ou $y = 5 - x$.

Le volume du solide est donné par $\pi \cdot (2x)^2 \cdot y + \frac{4}{2 \cdot 3} \cdot \pi \cdot x^3$.

La fonction à optimiser est donc $f(x) = 4\pi x^2(5 - x) + \frac{2\pi}{3}x^3$, donc $f(x) = \frac{\pi}{3}(60x^2 - 10x^3)$.

Sa dérivée vaut $f'(x) = \frac{10\pi}{3}(12x - 3x^2) = \frac{10\pi}{3}3x(4 - x)$.

Corrige 2019 3Ms

La croissance de f est la suivante (il faut que $x \in [0; +\infty[$).

x	0		4	
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$				

Le volume est donc maximum lorsque $x = 4$ et $y = 1$.

Solution 5. (18 points)

a) On a $(\Gamma_1) : (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 90$, donc $C_1(-4; 1)$ et $r_1 = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

b) Comme $C_2(2; -1)$ et $r_2 = \sqrt{10}$, on a

$$||\overrightarrow{C_1C_2}|| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = 3\sqrt{10} - \sqrt{10} = |r_1 - r_2|$$

donc les cercles sont tangents intérieurement.

Pour déterminer le point T d'intersection, on utilise

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OC_2} + \frac{1}{2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donc $T(5; -2)$. Finalement $(t) : 3x - y = 17$.

c) On pose $(t_i) : y = mx + h$.

Alors $h = -7 - 10m$ et $\sqrt{10} = \frac{|2m + 1 + h|}{\sqrt{m^2 + 1}}$, donc $10(m^2 + 1) = (-8m - 6)^2$ qui est encore équivalente à

$$27m^2 + 48m + 13 = 0$$

dont les solutions $m = -\frac{1}{3}$ et $m = -\frac{13}{9}$.

Les tangentes cherchées sont donc $(t_1) : y = -\frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$, donc $(t_1) : x + 3y + 11 = 0$ et $(t_2) : y = -\frac{13}{9}x + \frac{67}{9}$, donc $(t_2) : 13x + 9y = 67$.

d) Appelons C_3 le centre du cercle cherché. On a

$$\overrightarrow{OC_3} = \overrightarrow{OP} + \frac{\sqrt{10}}{||\overrightarrow{C_2P}||} \overrightarrow{C_2P} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

donc $(\Gamma_3) : (x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 10$.

Corrige 2019 3Ms

Solution 6. (15 points)

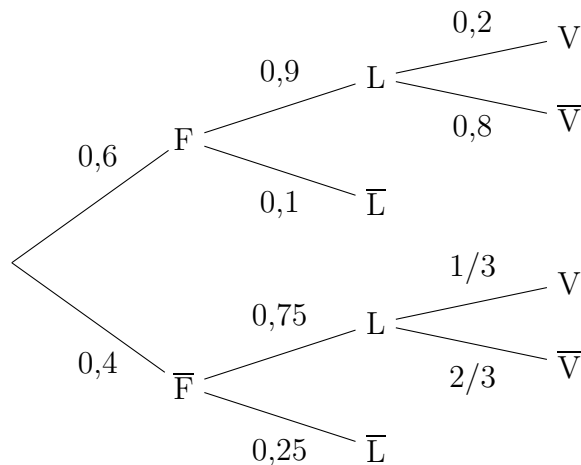
Partie A

a) On a $C_3^{10} = 120$.

b) C'est une permutation avec répétition : $\frac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$.

Partie B

On note F l'événement "la saison a été favorable", L : "les légumes ont bien poussés" et V : "le voisin est venu chaparder".



c) $P(\bar{L}) = 0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,25 = 16\%$.

d) $P(V) = 0,6 \cdot 0,9 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,75 \cdot \frac{1}{3} = 20,8\%$.

e) $P(\bar{F} | \bar{L}) = \frac{P(\bar{F} \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{0,4 \cdot 0,25}{0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,25} = 62,5\%$.

f) $P(L) = 1 - 0,16 = \frac{21}{25}$ donc $p = C_9^{10} \left(\frac{21}{25}\right)^9 \cdot \left(\frac{4}{25}\right) + \left(\frac{21}{25}\right)^{10} \cong 50,8\%$.

Corrige 2018 3Ms

Solution 1. (16 points)

f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et f s'annule si $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}$ puisque $e^x > 0$
D'où le signe de f :

x	0		2		
$f(x)$	—	0	+	0	—

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - x^2) e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - 2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{e^{-x}} = -0$$

Donc la fonction f admet la droite $y = 0$ comme asymptote horizontale à gauche.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - x^2) e^x = -\infty$$

Donc la fonction f n'admet aucune asymptote horizontale à droite.

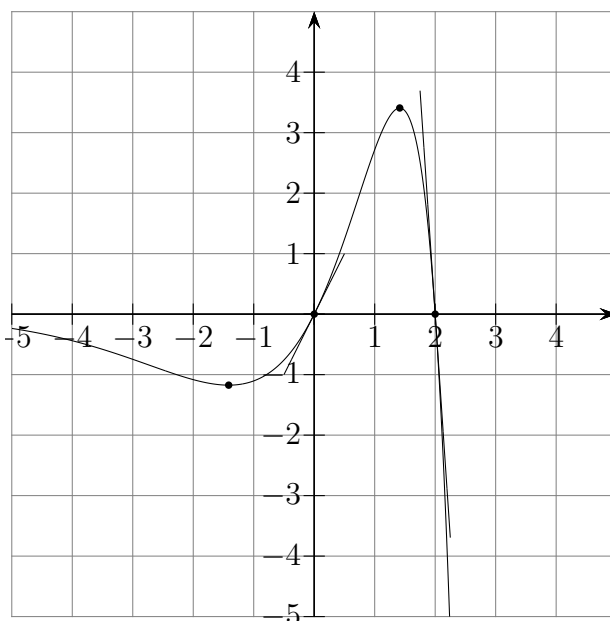
$$f'(x) = (2 - 2x) e^x + (2x - x^2) e^x = (2 - x^2) e^x$$

f' s'annule si $x = \pm\sqrt{2}$. D'où le signe de f' et la croissance de f :

x	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

$$f(-\sqrt{2}) = (-2\sqrt{2} - 2) e^{-\sqrt{2}} \simeq -1.174 \text{ c'est un minimum local}$$

$$f(\sqrt{2}) = (2\sqrt{2} - 2) e^{\sqrt{2}} \simeq 3.408 \text{ c'est un maximum local}$$



Corrige 2018 3Ms

Solution 2. (10 points)

a) $f(0) = 2 > g(0) = 1$ donc le graphe no 2 est celui de f .

$$\text{b) } \cos(2x) + 1 = \sqrt{3} \sin(2x) + 1 \Leftrightarrow \tan(2x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \simeq 1.866 \text{ d'où } A(0.262; 1.866)$$

$$f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \simeq 0.134 \text{ d'où } B(1.833; 0.134)$$

c) La région se situe entre les points A et B. Le graphe de g se situe au-dessus de celui de f .

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3} \sin(2x) - \cos(2x) dx &= \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2} \sin(2x) \right] \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\pi) - \frac{1}{2} \sin(\pi) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \simeq 1.366 \end{aligned}$$

Solution 3. (10 points)

$$\text{Contrainte } 2x \cdot y = 11200 \text{ ou } y = \frac{5600}{x}$$

$$\text{Longueur du barbelé } 3(2x + 2y) + 2x + y = 8x + 7y$$

$$\text{Fonction à optimiser } f(x) = 8x + \frac{39200}{x}$$

$$\text{Dérivée } f'(x) = 8 - \frac{39200}{x^2} = \frac{8(x^2 - 4900)}{x^2}$$

Croissance pour $x \in]0; +\infty[$

x	-70	0	70
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$		↘ ↗	

Minimum lorsque $x = 70$ et $y = 80$.

L'éleveur utilise le moins de barbelé lorsque les dimensions des enclos sont de 70 m sur 80 m.

Corrige 2018 3Ms

Solution 4. (10 points)

a)
$$\frac{\begin{array}{r} x^2 \\ -x^2 \quad -x \\ \hline x \quad +1 \\ \hline 1 \end{array}}{\quad} \left| \begin{array}{r} x+1 \\ x-1 \\ \hline \end{array} \right. \quad \text{d'où } f(x) = \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

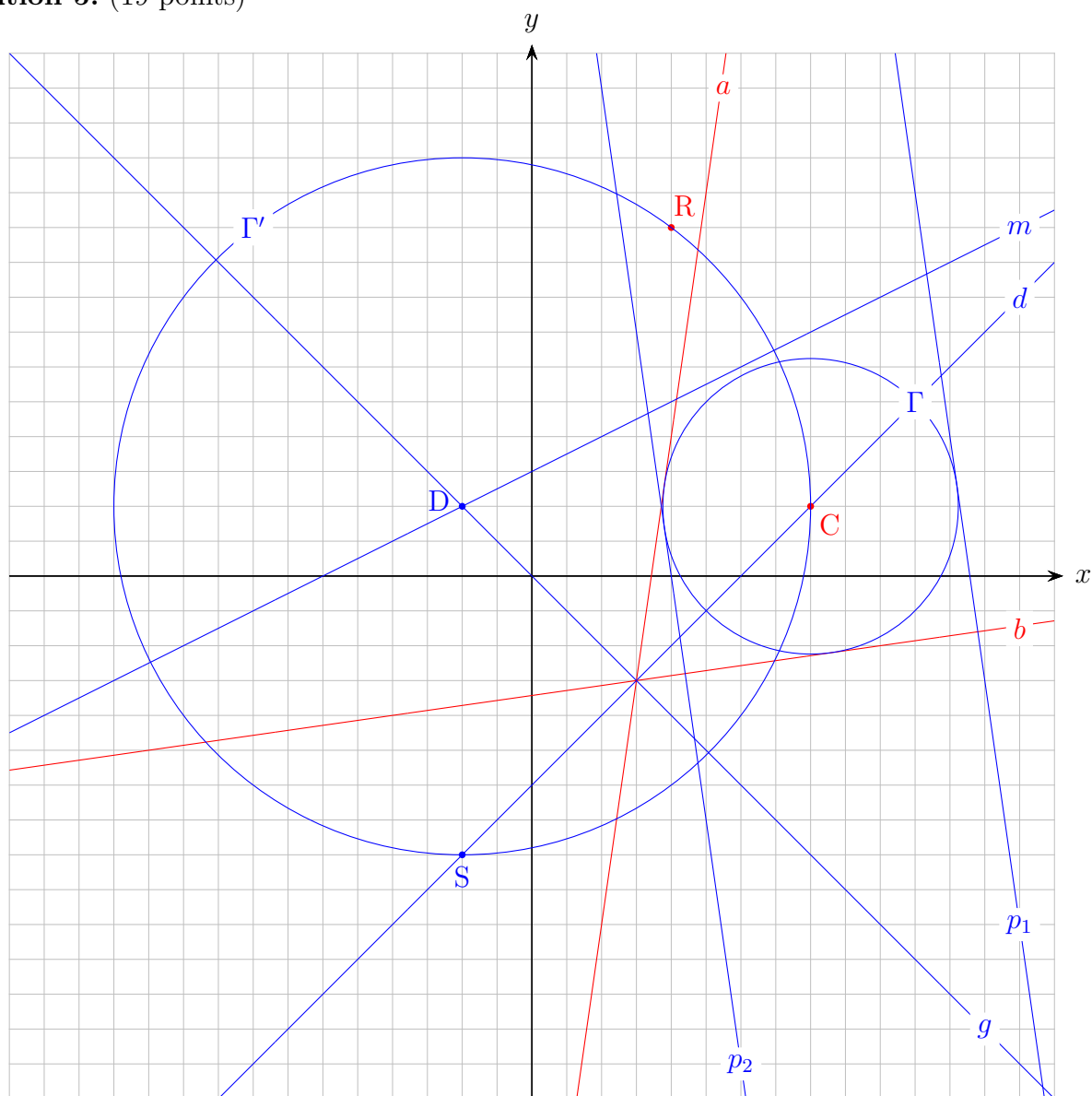
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|$$

b)
$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$f(1) = \frac{1}{2}$ et $f'(1) = \frac{3}{4}$ d'où l'équation de la tangente

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(x - 1) \Leftrightarrow 3x - 4y - 1 = 0$$

Solution 5. (19 points)



Corrige 2018 3Ms

a) Le vecteur $\overrightarrow{CR} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est normal à la médiatrice $m : x - 2y + c = 0$.

La droite passe par le milieu du segment CR noté M(6;6) et donc $6 - 2 \cdot 6 + c = 0$ ou $c = 6$ et

$$m : x - 2y + 6 = 0$$

b) On calcule $\delta(C; a) = \frac{|56 - 2 - 24|}{\sqrt{50}} = \frac{30}{5\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

et $\delta(C; b) = \frac{|8 - 14 - 24|}{\sqrt{50}} = \frac{30}{5\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ puis on constate l'égalité.

Le cercle est de rayon $r = 3\sqrt{2}$ on écrit son équation $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 - 18 = 0$.

c) Le vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ à la droite b donne la direction et donc la pente -7 des tangentes.

Les tangentes à Γ de pente -7 sont d'équation $y - 2 = -7(x - 8) \pm 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$ autrement dit

$$7x + y - 88 = 0 \text{ et } 7x + y - 28 = 0$$

d) Les équations des bissectrices sont données par $\frac{7x - y - 24}{\sqrt{50}} = \pm \frac{x - 7y - 24}{\sqrt{50}}$.

En amplifiant par $\sqrt{50}$ on obtient $7x - y - 24 = \pm(x - 7y - 24)$ autrement dit

$$8x - 8y - 48 = 0 \text{ qui s'écrit } x - y - 6 = 0$$

$$\text{et } 6x + 6y = 0 \text{ qui s'écrit } x + y = 0$$

e) $x + y = 0$ passe par O(0;0) car $0 + 0 = 0$ c'est la droite g .

La perpendiculaire à g par C est l'autre bissectrice.

Elles se coupent si $\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x = 6 \\ y = -x \end{cases}$ donc en (3; -3).

Le symétrique est donc S(-2; -8).

f) L'intersection est $\begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3x = -6 \\ y = -x \end{cases}$ donc D(-2; 2).

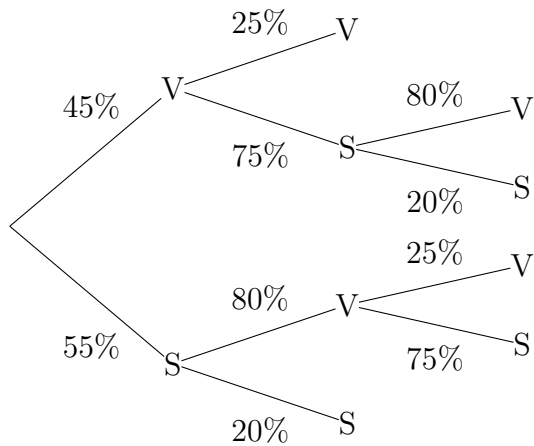
C'est le centre du cercle recherché. Son rayon est $r' = ||\overrightarrow{DC}|| = 10$.

Son équation est $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 - 100 = 0$.

Corrige 2018 3Ms

Solution 6. (15 points)

a)



b) $P(VV) = 0.45 \cdot 0.25 = 11.25\%$

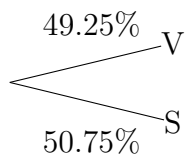
c) $P(VV \cup VSV \cup SVV) = 0.45 \cdot 0.25 + 0.45 \cdot 0.75 \cdot 0.8 + 0.55 \cdot 0.8 \cdot 0.25 = 49.25\%$

d) $P(VV \cup SS) = 0.45 \cdot 0.25 + 0.55 \cdot 0.2 = 22.25\%$

e) $P(SVV \cup SVS \cup SS | VSS \cup SVS \cup SS) = \frac{P(SVS \cup SS)}{P(VSS \cup SVS \cup SS)}$

$$= \frac{0.55 \cdot 0.8 \cdot 0.75 + 0.55 \cdot 0.2}{0.45 \cdot 0.75 \cdot 0.2 + 0.55 \cdot 0.8 \cdot 0.75 + 0.55 \cdot 0.2} = \frac{0.44}{0.5075} = 86.7\%$$

f)



$$P(5 V 7 S) = \frac{12!}{7! \cdot 5!} \cdot 0.4925^5 \cdot 0.5075^7 = 19.9\%$$