Problème 1 (22 points)

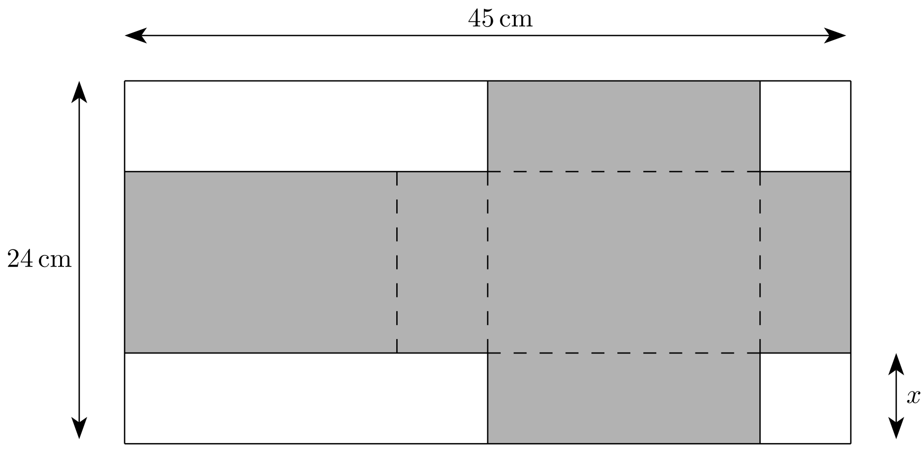
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{4x^2 + 5x}$.

On demande : l'ensemble de définition, le signe de f, les équations des éventuelles asymptotes verticales et horizontales, la croissance de f, les coordonnées des extremums de f et le graphe de f **sur la feuille annexe** (page 4).

Problème 2 (9 points)

Un artisan fabrique des boîtes en forme de parallélépipède rectangle à partir de feuilles cartonnées longues de 45 cm et larges de 24 cm. Il y découpe le chablon suivant.

Attention, ce croquis ne respecte pas les proportions !



a) Montrer que si x vaut 2 cm, le volume de la boîte fabriquée est de 820 cm^3.

b) Donner $V(x)$, l'expression du volume de la boîte en fonction de x.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de x le volume est-il maximal ? Justifier.

Problème 3 (12 points)

On considère la fonction $f : \;]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x + \dfrac{5}{x}$.

a) Calculer l'aire de la surface délimitée par le graphe de f et la droite d'équation $y = 6$.

b) Calculer le volume de révolution autour de Ox du domaine délimité par le graphe de f et les droites $x = 1$ et $x = 2$.

c) Donner l'équation de l'asymptote oblique de f.

Problème 4 (11 points)
Les questions suivantes sont indépendantes.

a) Considérons les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x} - 1$.

Montrer que leurs graphes se coupent à angle droit en leur point d'abscisse 1.

b) Les cercles d'équations

$$\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 6\,x - 10\,y = 2 \quad \text{et} \quad \Gamma_2 : (x-5)^2 + (y-8)^2 = 4$$

sont-ils confondus, sécants, tangents (intérieurement ou extérieurement) ou disjoints ? Justifier.

Problème 5 (19 points)
On considère le cercle $\Gamma : (x+4)^2 + y^2 = 800$, ainsi que les points $\mathrm{A}(21\,;25)$ et $\mathrm{B}(28\,;24)$.

Tous les éléments de ce problème peuvent être représentés sur l'annexe de la page 5 si nécessaire.

a) Déterminer le centre C et le rayon r du cercle Γ.

b) Soit d_{AB} la droite passant par A et B. Donner les coordonnées de C', symétrique de C par rapport à la droite d_{AB}.

c) Calculer l'aire du triangle ABC.

d) Montrer que le point A est extérieur au cercle Γ, puis donner les équations des droites t_1 et t_2 tangentes à Γ issues de A.

Problème 6 (14 points)
Neuf pièces de monnaie sont pipées de sorte que la probabilité d'obtenir pile vaut deux tiers.

a) On lance les neuf pièces. Calculer la probabilité d'obtenir sept fois pile et deux fois face.

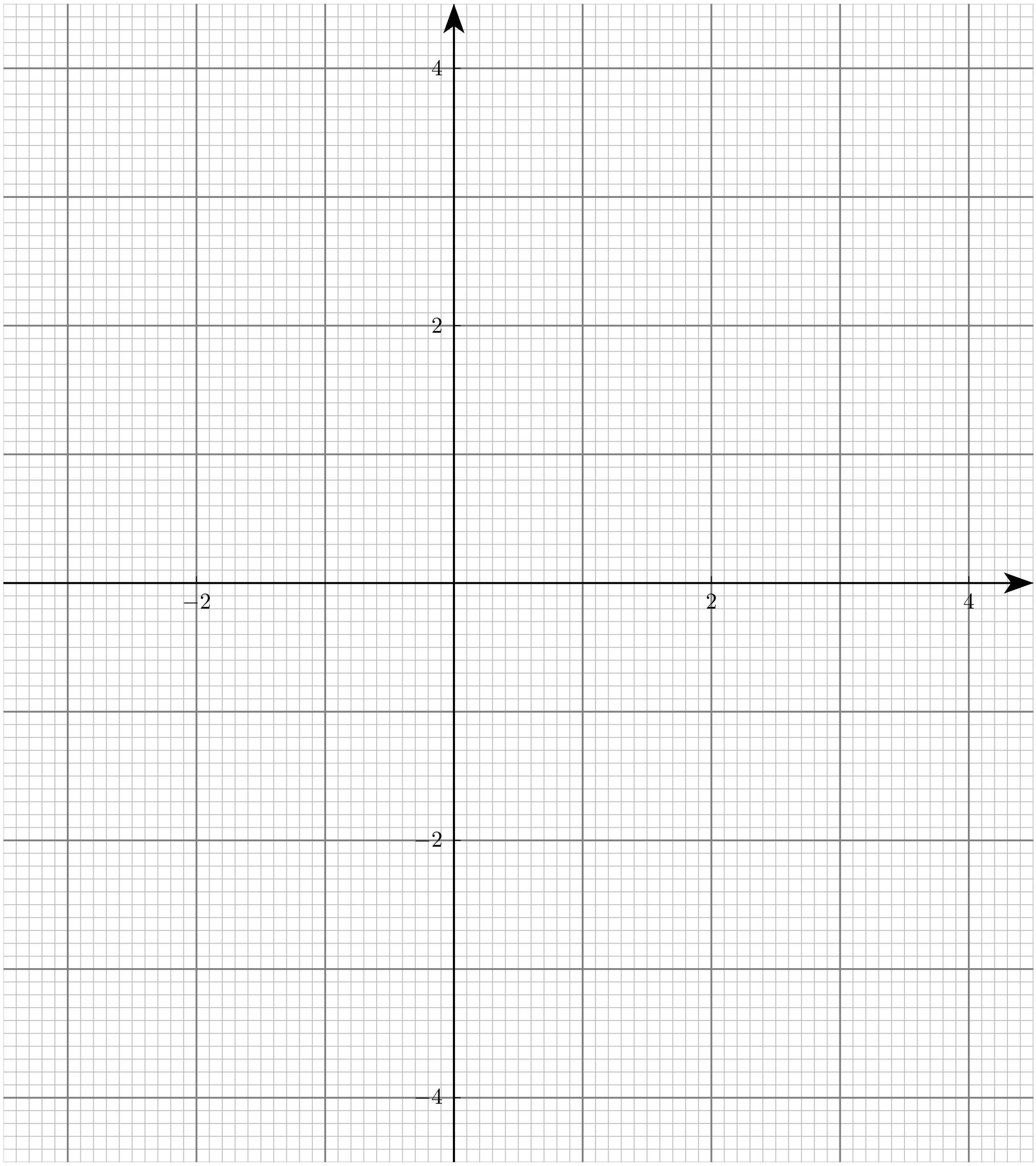
On ajoute une dixième pièce équilibrée aux neuf pièces pipées.

b) On choisit une pièce au hasard et on la lance.
   i) Calculer la probabilité d'obtenir face.
   ii) Calculer la probabilité qu'il s'agisse de la pièce équilibrée, sachant qu'on a obtenu face.

c) On lance deux pièces prises au hasard parmi les dix. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois pile.

Nom, prénom : ______________________

Annexe du problème 1



Problème 1 (23 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3\,x^3 - 6\,x}{x^2 - 3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f, son signe et les équations de ses asymptotes.

b) Vérifier que la dérivée de f est donnée par l'expression $f'(x) = \dfrac{3\,(x^2-6)\,(x^2-1)}{(x^2-3)^2}$.

c) Déterminer la croissance de f et les coordonnées des extrema de f.

d) Sur une nouvelle page, esquisser le graphe de f à l'échelle 1 unité = 2 carrés = 1 cm.

Problème 2 (14 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

a) Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(x).$$

Esquisser leur graphe sur l'intervalle $[0; 2\,\pi]$. Déterminer l'aire de la région limitée par les courbes $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ et $x = \pi$ (on demande la valeur exacte).

b) Déterminer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la région limitée par les courbes

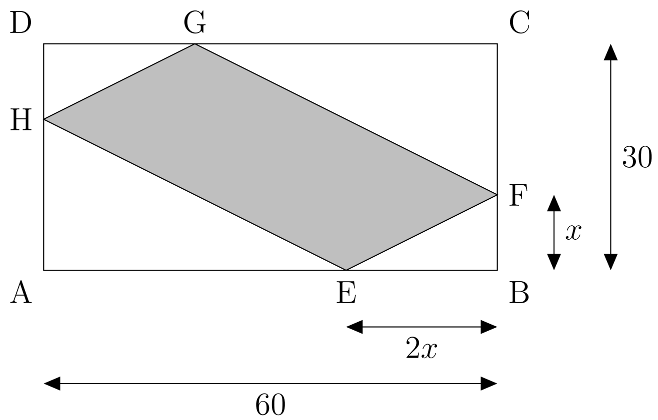
$$y = 5 - x^2 \quad \text{et} \quad y = 1$$

autour de l'axe des x (on demande la valeur exacte).

Problème 3 (8 points)

Le parallélogramme EFGH est inscrit dans un rectangle ABCD de dimensions 30 cm × 60 cm de sorte que BE = 2BF. On pose x = BF et $2x$ = BE.

Quelle est l'aire maximale de ce parallélogramme ? Que vaut alors x ? Justifier.



Problème 4 (21 points)
Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(-3\,;-2)$ et le cercle Γ d'équation

$$x^2 + y^2 - 2\,x - 16\,y + 7 = 0.$$

a) Déterminer les coordonnées du centre C et le rayon r du cercle Γ.

b) Montrer que A est extérieur au cercle Γ et déterminer la plus courte distance d'un point de Γ au point A.

c) Déterminer une équation cartésienne de m, la médiatrice du segment [AC].

d) Soient B et D les points d'intersection de m et Γ. Vérifier que B a pour coordonnées $(4\,;1)$ et déterminer celles de D.

e) La droite (AD) a pour équation $7\,x+3\,y+27 = 0$. Montrer qu'elle est tangente au cercle Γ.

f) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB).

g) La droite (AB) est tangente au cercle Γ. Déterminer l'équation de la droite t parallèle à (AB) et également tangente au cercle Γ. On nommera T le point de tangence et F l'intersection de t avec (AD) (on ne demande pas leurs coordonnées).

h) Déterminer la nature du quadrilatère ABTF et calculer son aire.

Problème 5 (17 points)
La plupart des articles commercialisés sont identifiés par un code à 13 chiffres traduit sous forme de code-barres pour la saisie informatique.

Le dernier chiffre est une clef de contrôle qui permet de détecter les éventuelles erreurs de saisie par des humains ou par des capteurs électroniques.

D'après les données statistiques, les erreurs de saisie se répartissent **exclusivement** selon les types ci-dessous :

- un seul chiffre faux : 60%,
- inversion de deux chiffres : 10%,
- ajout ou oubli d'un chiffre : 30%.

La clef de contrôle détecte toute erreur portant sur un seul chiffre. L'inversion de deux chiffres est détectée 8 fois sur 9, un mauvais nombre de chiffres 9 fois sur 10.

Pour la suite, nous nous intéressons uniquement aux cas où une erreur s'est produite.

a) Représenter la situation par un arbre.

b) Vérifier que la probabilité qu'une erreur soit détectée vaut $95{,}\overline{8}\%$.

c) La clef de contrôle a détecté une erreur, quelle est la probabilité qu'un seul des chiffres saisis soit faux ?

d) Sachant que le code saisi a le bon nombre de chiffres, quelle est la probabilité que la clef de contrôle détecte une erreur ?

On vérifie dix codes à l'aide de la clef de contrôle.

e) Calculer la probabilité que la clef de contrôle détecte exactement huit codes présentant une erreur.

f) Calculer la probabilité que la clef de contrôle ne détecte pas d'erreur sur au moins l'un des dix codes.

Problème 1 (22 points)
Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{135(x^2-6)}{x^6}$$

a) Donner le domaine de définition de la fonction f, son signe et les équations des éventuelles asymptotes.
b) Étudier la croissance de la fonction f en précisant les coordonnées des extremums.
c) Esquisser le graphe de la fonction f (échelle conseillée pour l'axe horizontal : 1 unité correspond à 2 carrés, et pour l'axe vertical : 1 unité correspond à 20 carrés).
d) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction f au point $(1; f(1))$.

Problème 2 (21 points)
Les questions suivantes sont indépendantes.

a) Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{6\,x^2+x+1}{2\,x+1}$.
b) Déterminer l'aire de la région limitée par les courbes

$$y = f(x) \qquad \text{et} \qquad y = g(x)$$

où

$$f(x) = -x^2 + 6\,x - 4 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 4\,.$$

c) Soit $f(x) = \cos(3x+\pi) - \frac{1}{2}$. Déterminer les zéros de la fonction f, puis sa dérivée.
d) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{\ln(x+1)}$.

Problème 3 (18 points)
Soient $\mathrm{A}(-22;-10)$, $\mathrm{B}(9;21)$ et $\mathrm{C}(27;-3)$ les sommets d'un triangle.

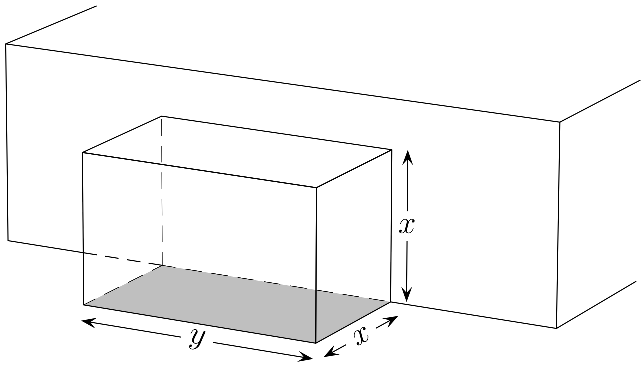
a) Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice m du côté AB.
b) Vérifier que la droite n d'équation $3x-4y-18=0$ est la médiatrice de BC.
c) Montrer que l'équation du cercle Γ circonscrit au triangle ABC est $(x-2)^2+(y+3)^2 = 625$.
d) Montrer que le point $\mathrm{P}(22;12)$ est commun au cercle Γ et à la médiatrice n, puis déterminer les coordonnées de l'autre point d'intersection de Γ et n.
e) On admet que l'équation du côté AB est $x-y=-12$ et que celle du côté AC est $x-7y=48$. Déterminer les équations des bissectrices b_1 et b_2 de l'angle en A.
Indication : $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
f) Vérifier que P est sur l'une de ces bissectrices.

Problème 4 (11 points)
Un restaurant souhaite, pour un budget de 54 000 fr., réaliser une véranda afin d'augmenter sa capacité d'accueil.
Cette extension, en forme de parallélépipède rectangle, se compose de

— quatre parties en panneaux de verre : un toit, une façade et deux faces latérales carrées,

— un sol en bois.

Sachant que les panneaux de verre coûtent 360 fr./m^2 et que le bois coûte 240 fr./m^2, déterminer les dimensions de la véranda permettant d'obtenir un volume maximal.



Problème 5 (13 points)
Dans les forêts de Suisse on compte une soixantaine d'essences d'arbres dont en moyenne 44 % d'épicéas, 18 % de hêtres et 15 % de sapins. Les autres essences sont toutes nettement moins répandues.

a) Sylvain se balade en forêt, il passe devant trois arbres à la suite. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de trois épicéas ?

b) Au cours de sa promenade, Sylvain grave chacune des sept lettres de son prénom sur le tronc de sept arbres choisis au hasard (une lettre par tronc). Vérifier que la probabilité que les lettres de son prénom soient toutes écrites sur des arbres appartenant uniquement aux essences les moins répandues des forêts suisses est inférieure à 0,01 %.

c) Sylvain décide ensuite de ramasser un morceau d'écorce de cinq arbres au hasard. Quelle est la probabilité qu'il récolte au moins une écorce de hêtre ?

d) Puis Sylvain coupe une branche sur cinq arbres au hasard. Quelle est la probabilité que son bouquet de cinq rameaux soit composé de deux branches d'épicéa, une branche de hêtre et deux de sapins ?

e) Sylvain désire ramener chez lui un sapin pour Noël directement de la forêt, mais il est incapable de différencier les sapins des épicéas. Il ramène donc chez lui un arbre de Noël qui peut être l'un ou l'autre. Quelle est la probabilité que Sylvain rapporte un véritable sapin à la maison ?

Problème 1 (17 points)

Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2\,x^3}{x^2 - 2\,x + 1}$.

On demande : le signe de f, les équations des asymptotes, la croissance de f, les coordonnées des extremums de f et le graphe de f.

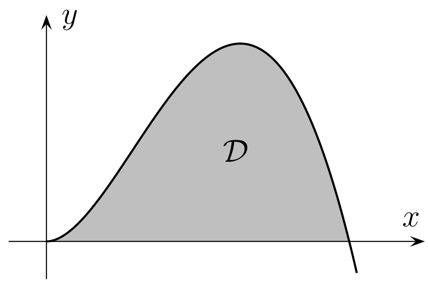
Problème 2 (13 points)
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 2\,x^2 - x^2\,\sqrt{x}.$$

a) Donner les zéros de la fonction f.

b) Déterminer l'aire du domaine borné $\mathcal{D}$ délimité par le graphe de la fonction f et l'axe horizontal.

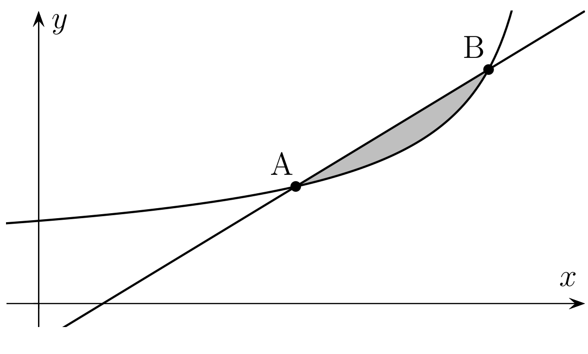


Partie B
On considère les fonctions g et h définies par $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{8-x}}$ et $h(x) = \dfrac{1}{3}\,(x-1)$.

c) Soient $\mathrm{A}(a_1; a_2)$ et $\mathrm{B}(b_1; b_2)$ les points d'intersection des graphes de ces deux fonctions.

- Vérifier que $a_1 = 4$ et que $b_1 = 7$.
- Calculer a_2 et b_2.

d) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe horizontal du domaine borné délimité par le graphe de ces deux fonctions.



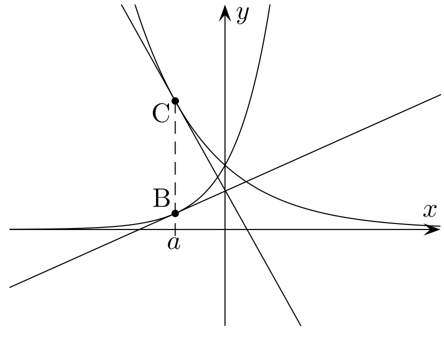
Problème 3 (9 points)
Considérons les fonctions f et g définies par $f(x) = e^{2\,x}$ et $g(x) = e^{-x}$.

a) Soit P le point d'intersection des graphes des fonctions f et g. Déterminer les pentes des tangentes aux graphes de f et de g en P. En déduire l'angle aigu formé par ces tangentes.

b) Ci-contre les graphes des fonctions f et g.

Quelles sont les coordonnées des points B et C, alignés verticalement, sachant que les tangentes en ces points aux graphes de f et de g sont perpendiculaires ?

Indication : deux droites, de pente m_1 et m_2, sont perpendiculaires si et seulement si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

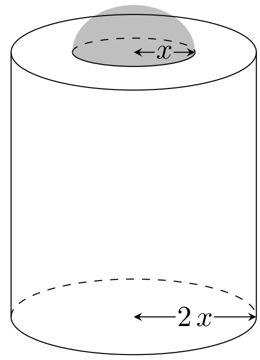


Problème 4 (10 points)

Le solide S est formé d'un cylindre de rayon $2\,x$ et de hauteur y sur lequel est posé une demi-sphère de rayon x.

La somme de la hauteur du cylindre et du rayon de la demi-sphère est égale à 5.

Déterminer x et y de sorte que le volume du solide S soit maximal.



Problème 5 (18 points)
Soient les cercles $\Gamma_1 : x^2 + y^2 + 8\,x - 2\,y = 73$ et $\Gamma_2 : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$.

a) Déterminer le centre C_1 et le rayon r_1 du cercle Γ_1.

b) Montrer que le cercle Γ_2 est tangent intérieurement au cercle Γ_1.
Calculer les coordonnées de leur point d'intersection T.
Donner une équation cartésienne de la tangente t commune à Γ_1 et Γ_2.

c) Déterminer une équation cartésienne de chacune des tangentes au cercle Γ_2 issues du point $A(10\,;-7)$.

d) Déterminer l'équation d'un cercle Γ_3 de rayon $\sqrt{10}$, tangent extérieurement à Γ_2 au point $P(-1;-2)$.

Problème 6 (15 points)
Bertrand doit choisir quelles variétés de graines semer dans son potager. Au magasin, il y a dix variétés de graines.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

a) Bertrand décide d'acheter trois variétés de graines. Combien a-t-il de choix ?

b) Dans les six emplacements de son potager, Bertrand veut semer des carottes dans trois emplacements, des courges dans deux emplacements et des radis dans un emplacement. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

Partie B

On sait que 60 % des saisons sont favorables aux cultures. De plus, si la saison est favorable, les légumes ont 90 % de chance de bien pousser, contre 75 % de chance dans le cas contraire. Enfin, si les légumes ont bien poussé, le voisin de Bertrand vient chaparder ses légumes, une fois sur cinq si la saison a été favorable, une fois sur trois si la saison a été défavorable.

c) Vérifier que la probabilité que les légumes aient mal poussé est de 16 %.

d) Quelle est la probabilité que le voisin de Bertrand vienne chaparder ses légumes ?

e) Sachant que les légumes ont mal poussé, quelle est la probabilité que la saison ait été défavorable ?

f) Bertrand s'est occupé d'un potager pendant dix saisons. Quelle est la probabilité que ses légumes aient bien poussé au moins neuf fois ?

MATHÉMATIQUES (durée 4 heures)

Matériel autorisé : formulaires officiels non annotés et calculatrices agréées selon liste officielle.

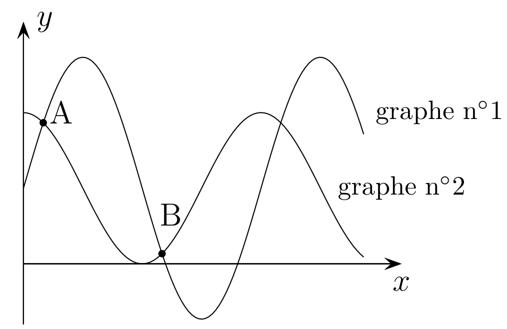
Rédigez complètement les solutions des problèmes proposés ci-dessous.
Les annotations sur les feuilles d'énoncés sont autorisées, mais ne seront pas prises en considération.

Problème 1 (16 points)

Étudier la fonction f définie par $f(x) = (2\,x - x^2)\,e^x$.

On demande : le signe de f, les équations des asymptotes, la croissance de f, les coordonnées des points qui correspondent aux extremums de f et le graphe de f.

Problème 2 (10 points)



On a représenté ci-contre le graphe des fonctions

$$f(x) = \cos(2\,x) + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{3}\,\sin(2\,x) + 1$$

sur l'intervalle $[0, 2\,\pi]$.

a) Attribuer un graphe à f et l'autre à g. Justifier.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B.

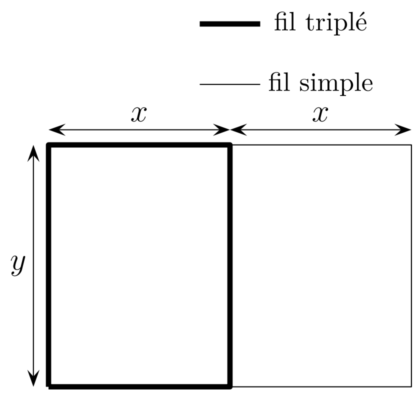
Rappel : $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

c) Calculer l'aire de la région limitée par les courbes

$$y = f(x), \quad y = g(x), \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Problème 3 (10 points)

Un éleveur de bovins désire délimiter deux enclos rectangulaires de même surface : le premier pour les taureaux, le second pour les vaches et les jeunes. Pour que son installation soit certifiée *élevage bio en plein air*, la surface totale des deux enclos doit être de 11 200 m^2. Les deux enclos seront accolés l'un à l'autre et auront la même largeur. Celui des taureaux sera entouré d'un fil de fer barbelé triplé. Celui des vaches et des jeunes sera délimité par un fil barbelé simple sur les trois côtés non attenants au pré des taureaux.



Déterminer les dimensions des deux enclos pour que l'éleveur utilise une longueur minimale de fil barbelé.

Problème 4 (10 points)

On considère la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Calculer une primitive de la fonction f.

b) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $x = 1$.

Problème 5 (19 points)

On donne les droites $a : 7\,x - y - 24 = 0$ et $b : x - 7\,y - 24 = 0$ ainsi que les points C$(8; 2)$ et R$(4; 10)$.

a) Déterminer une équation de la médiatrice m du segment CR.

b) Montrer que le point C est équidistant des droites a et b. Déterminer une équation du cercle Γ de centre C tangent aux droites a et b.

c) Déterminer les équations des tangentes au cercle Γ qui sont perpendiculaires à la droite b.

d) Déterminer les équations des bissectrices des droites a et b.

e) On appelle g la bissectrice qui passe par l'origine O$(0; 0)$. Calculer les coordonnées du symétrique S de C par rapport à g.

f) Calculer les coordonnées du point d'intersection D des droites m et g. Déterminer ensuite une équation du cercle Γ' passant par les points C, R et S.

Problème 6 (15 points)

Les sœurs Venus et Serena s'affrontent aux sports de raquettes.

- Au ping-pong, Venus a 80% de chance de gagner.
- Au badminton, Serena a 75% de chance de gagner.
- Au tennis, c'est plus équitable : Serena a 55% de chances de gagner.

L'affrontement consiste en un match de trois manches s'arrêtant aussitôt que l'une des joueuses gagne deux manches. La première manche se joue au tennis. Ensuite, la **perdante** de la première manche choisit, pour la deuxième manche, la discipline dans laquelle elle a le plus de chance de gagner. Si une troisième manche est nécessaire, elle se joue dans la dernière discipline non encore choisie.

a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre.

b) Vérifier que la probabilité que Venus gagne les deux premières manches est de 11,25 %.

c) Calculer la probabilité que Venus gagne l'affrontement.

d) Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de troisième manche.

e) Sachant que Serena a gagné l'affrontement, calculer la probabilité qu'elle ait gagné la première manche.

f) En imaginant que les deux sœurs s'affrontent de la sorte une fois par mois pendant une année, calculer la probabilité que Serena gagne exactement sept fois sur l'année.