Problème 1 (11 points)
Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 6 \mod 14 \\ x \equiv 12 \mod 15 \\ x \equiv 16 \mod 17 \end{cases}$$

Problème 2 (10 points)
Herlock et Atson ont pris l'habitude d'utiliser le système RSA pour se transmettre diverses informations. La clé publique d'Atson est (589 ;7). Herlock envoie à Atson le message 61 pour lui communiquer le numéro de Backer Street auquel ils doivent se retrouver.

Déchiffrer le message. Où est fixé le rendez-vous ?

Problème 3 (17 points)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + y' - 12\,y - 65\,\sin(2\,x) = 0$

b) $(4\,x^2 + 1) \cdot y' = (1 + 4\,x)y$

Problème 4 (11 points)
Soit l'application $f\,:\,\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \frac{1}{13}\,(5 + 12i)\,z + 4 - 32i.$$

a) Vérifier que f correspond à une isométrie et déterminer le type de cette dernière. Préciser ses éléments caractéristiques (vecteur s'il s'agit d'une translation, centre et angle s'il s'agit d'une rotation, axe s'il s'agit d'une symétrie et enfin axe de symétrie et vecteur s'il s'agit d'un renversement sans point fixe).

b) On donne les nombres $z_1 = 0$, $z_2 = 13$ et $z_3 = 13i$. Calculer $z_1' = f(z_1)$, $z_2' = f(z_2)$ et $z_3' = f(z_3)$, puis reporter ces six valeurs sur la figure annexée. Déterminer ensuite graphiquement les éléments caractéristiques de l'isométrie (sans faire usage des résultats obtenus à la partie précédente).

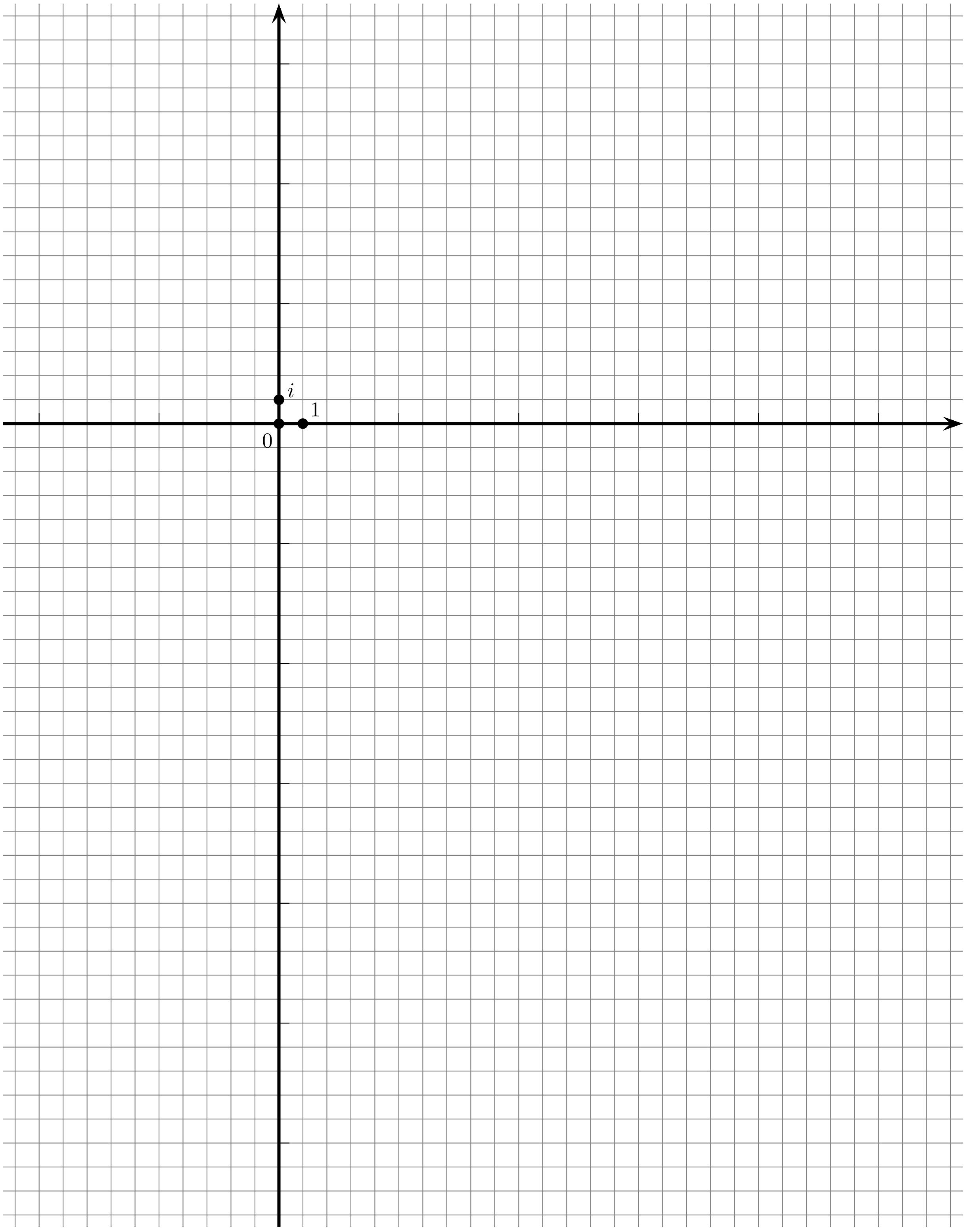
Problème 5 (6 points)

a) Déterminer le polynôme de Taylor de degré 3 de la fonction $f(x) = \cos(6\,x)$ au voisinage de $a = \frac{\pi}{6}$.

b) Utiliser le résultat précédent pour estimer $f(\frac{1}{2}) = \cos(3)$.

Nom, prénom : ______________________

Annexe du problème 4



Problème 1 (15 points)
Un messager livre au service de renseignement Vert le message 322 signé 287.

Selon les dires du messager, ce message émanerait de l'unité Rouge infiltrée dans le pays Bleu ; il contiendrait le nombre de supers ordinateurs de l'armée bleue.

Avant de livrer le message au président, il s'agit

a) de le décrypter à l'aide de la clé secrète du service de renseignement Vert $(n = 493; p = 17; q = 29; e = 69; d = 13)$;

b) de vérifier son authenticité à l'aide de la clé de l'unité Rouge $(n_{\mathrm{R}} = 437; e_{\mathrm{R}} = 7)$.

Problème 2 (8 points)
Démontrer par récurrence la relation pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1^2 - 1 + 2^2 - 2 + 3^2 - 3 + \cdots + n^2 - n = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}.$$

Problème 3 (17 points)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est suggérée par

$\sqrt{2}\,;\quad \sqrt{1+\sqrt{2}}\,;\quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}\,;\quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}\,;\quad \ldots$

a) Définir cette suite par une relation de récurrence.

b) Sachant que la suite est convergente, calculer sa limite.

c) Montrer que la suite est convergente.

Problème 4 (9 points)
Trouver la somme de tous les nombres entiers de 1 à 3000 qui ne sont multiples ni de 7, ni de 11.

Problème 5 (10 points)
On considère la somme $\dfrac{5}{1\cdot 3} + \dfrac{5}{2\cdot 4} + \dfrac{5}{3\cdot 5} + \dfrac{5}{4\cdot 6} + \cdots$

a) Quel est le terme général de cette série ?

b) Vérifier que $\dfrac{5}{k(k+2)} = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right)$.

c) Calculer la k^{e} somme partielle s_k de cette série.

d) En déduire qu'elle converge et calculer sa somme.

Problème 6 (15 points)
Un restaurateur vient de recevoir sa commande de vin : 23 bouteilles *réserve spéciale* ainsi qu'un grand nombre de cartons de 6 bouteilles. Il désire ranger toutes les bouteilles commandées dans des casiers qui peuvent contenir chacun 35 bouteilles.
Après avoir rempli ses étagères, il réalise qu'il lui reste deux bouteilles qu'il offre au livreur pour le remercier de l'avoir aidé.
Combien de bouteilles le restaurateur a-t-il commandé au maximum si ce nombre est plus petit que mille ?

Problème 1 (14 points)
Une bande de 26 pirates s'est emparée d'un trésor contenant des pièces d'or de même valeur. Ils décident de se les répartir équitablement et de donner le reste au cuisinier. Celui-ci recevrait alors 17 pièces.

Une bagarre éclate entre les pirates et 13 d'entre eux meurent. Le cuisinier se rend compte qu'il va recevoir finalement 4 pièces.

Le cuisinier décide alors de se rebeller et exige un partage équitable, sous peine de ne plus faire à manger pour les pirates. Ceux-ci acceptent la demande du cuisinier, font le partage et jettent les 9 pièces restantes à la mer.

Sachant qu'il y avait entre 600 et 700 pièces d'or dans le trésor, combien ce dernier en contenait-il ?

Problème 2 (19 points)
Romane et Julien utilisent le système RSA pour se transmettre les dates de leurs rendez-vous secrets. Romane a choisi la clé publique $(n_{\mathrm{A}}, e_{\mathrm{A}}) = (133, 5)$ et Julien $(253, 5)$.

a) Romane demande à Julien de changer de clé, car son choix n'est pas bon. Expliquer pourquoi.

Julien choisit alors la clé publique $(n_{\mathrm{B}}, e_{\mathrm{B}}) = (253, 63)$.

b) Quel est le message chiffré non signé que Julien doit envoyer à Romane, s'il veut fixer l'heure du rendez-vous à 8 ?

Romane pense que quelqu'un est au courant de leur rendez-vous. Elle décide donc d'envoyer le message chiffré signé $(148, 185)$ à Julien pour changer l'heure.

c) Quel est l'heure fixée par Romane ?

d) Julien peut-il se fier à ce message ?

Problème 3 (18 points)
Résoudre les équations différentielles suivantes.

a) $(1 - x^2)\, y' - 2xy = x^2$, pour $x \in \,]-1; 1[$.

b) $y'' + 2y' + 5y = e^{3x}$.

Problème 4 (10 points)
Soit p un nombre réel. Considérons la série de terme général

$$u_n = \frac{n+1}{2(n+2)} \cdot n^p.$$

a) Déterminer si cette série converge lorsque $p = 1$.

b) Déterminer si cette série converge lorsque $p = -1$.

c) Discuter de la convergence de cette série lorsque $p < -1$.

Problème 5 (11 points)
Considérons la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $x_0 = 1$ et

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{3 + 2x_n}.$$

a) Écrire les quatre premiers termes de cette suite.

b) Est-ce que $x_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$? Justifier.

c) En admettant que $x_{n+1} - x_n < 0$ pour tout $n \geqslant 0$, montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente, puis calculer sa limite.

d) Montrer par récurrence que $x_{n+1} - x_n < 0$ pour tout $n \geqslant 0$.

Problème 1 (15 points)
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{13x^2 - 6x + 8}{x^4 - 2x^3 - 8x^2}\, dx$ b) $\displaystyle\int x \cdot \cos^2(x)\, dx$

Problème 2 (17 points)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $xy' + 3y = x^4 + 2x^3$ b) $y'' - 5y' + 6y = e^{2x} + 5e^{4x}$

Problème 3 (25 points)
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit la fonction complexe

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{5}(3 - 4i)\,\overline{z} + (-9 - 3i) \end{aligned}$$

a) Vérifier que f est une isométrie et prouver qu'il s'agit d'un renversement sans point fixe (appelé aussi symétrie glissée).

b) On donne les nombres $z_1 = 0$, $z_2 = 5$ et $z_3 = 5i$.
Calculer $z_1' = f(z_1)$, $z_2' = f(z_2)$ et $z_3' = f(z_3)$, puis reporter ces six valeurs sur la figure annexée.

c) Sur la figure annexée, construire ensuite les éléments caractéristiques du renversement sans point fixe, à savoir l'axe de symétrie ainsi que le vecteur de translation parallèle à l'axe de symétrie. Donner une brève marche à suivre.

Partie B

Construire l'image de la figure donnée en annexe (composée des segments $a = \text{MN}$, $b = \text{PQ}$ ainsi que des demi-cercles α et β) par l'inversion par rapport au cercle γ de centre Ω.

Une marche à suivre n'est pas exigée mais les images a', b', α' et β' doivent apparaître clairement sur la feuille.

Problème 4 (16 points)
Alexandra veut envoyer le message secret $m = 27$ à Bernt. Elle décide de le crypter avec le système de cryptage RSA.

La clé privée de Bernt est $(p; q; d) = (7; 19; ?)$ et sa clé publique est $(n; e) = (?; 11)$.

a) Montrer que $\varphi(133) = 108$, où φ est la fonction indicatrice d'Euler.

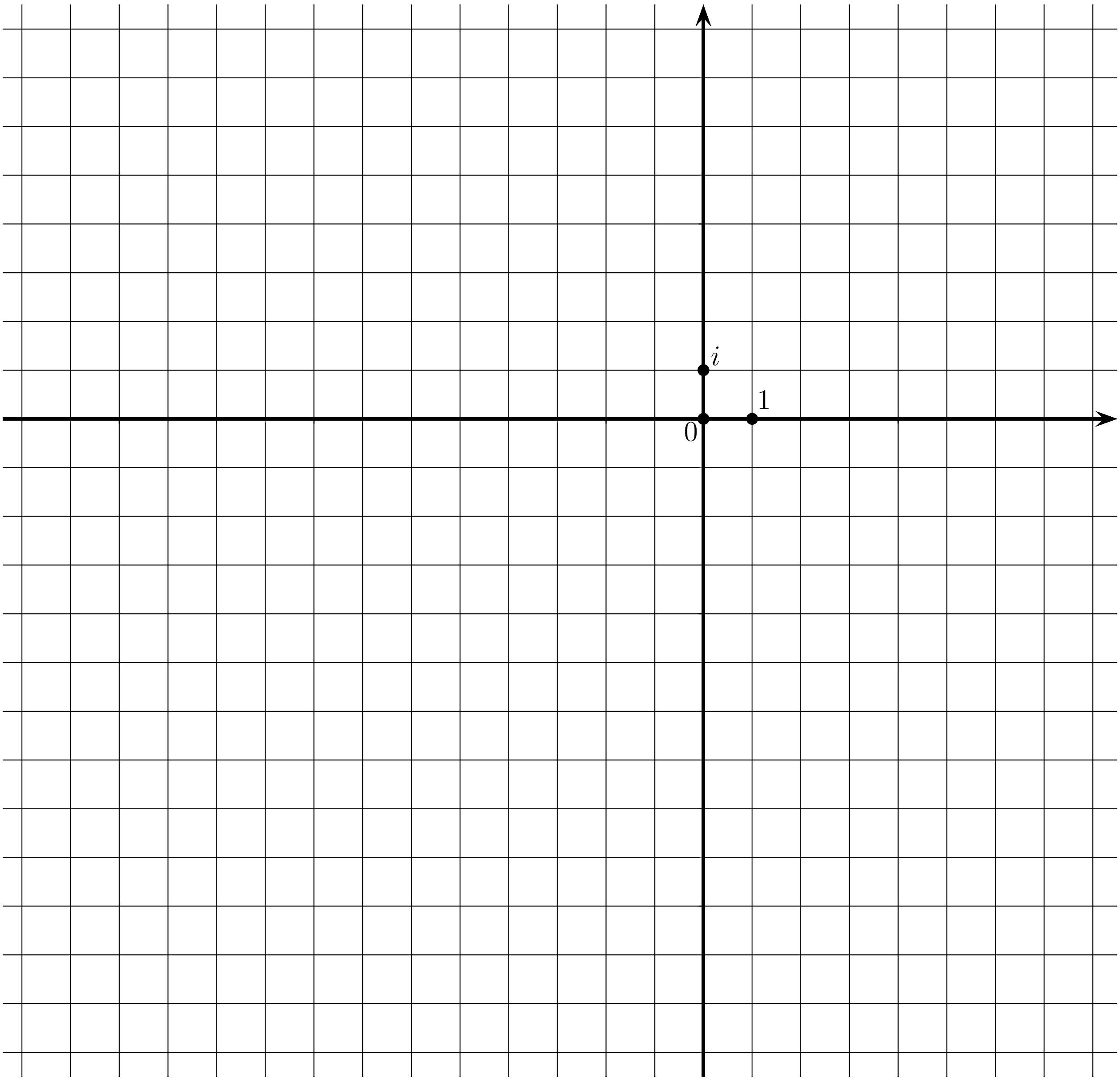
b) Déterminer toutes les solutions de l'équation diophantienne $11x + \varphi(133)y = 1$.

c) Donner le nombre d.

d) Quel est le message codé qu'Alexandra envoie à Bernt ?

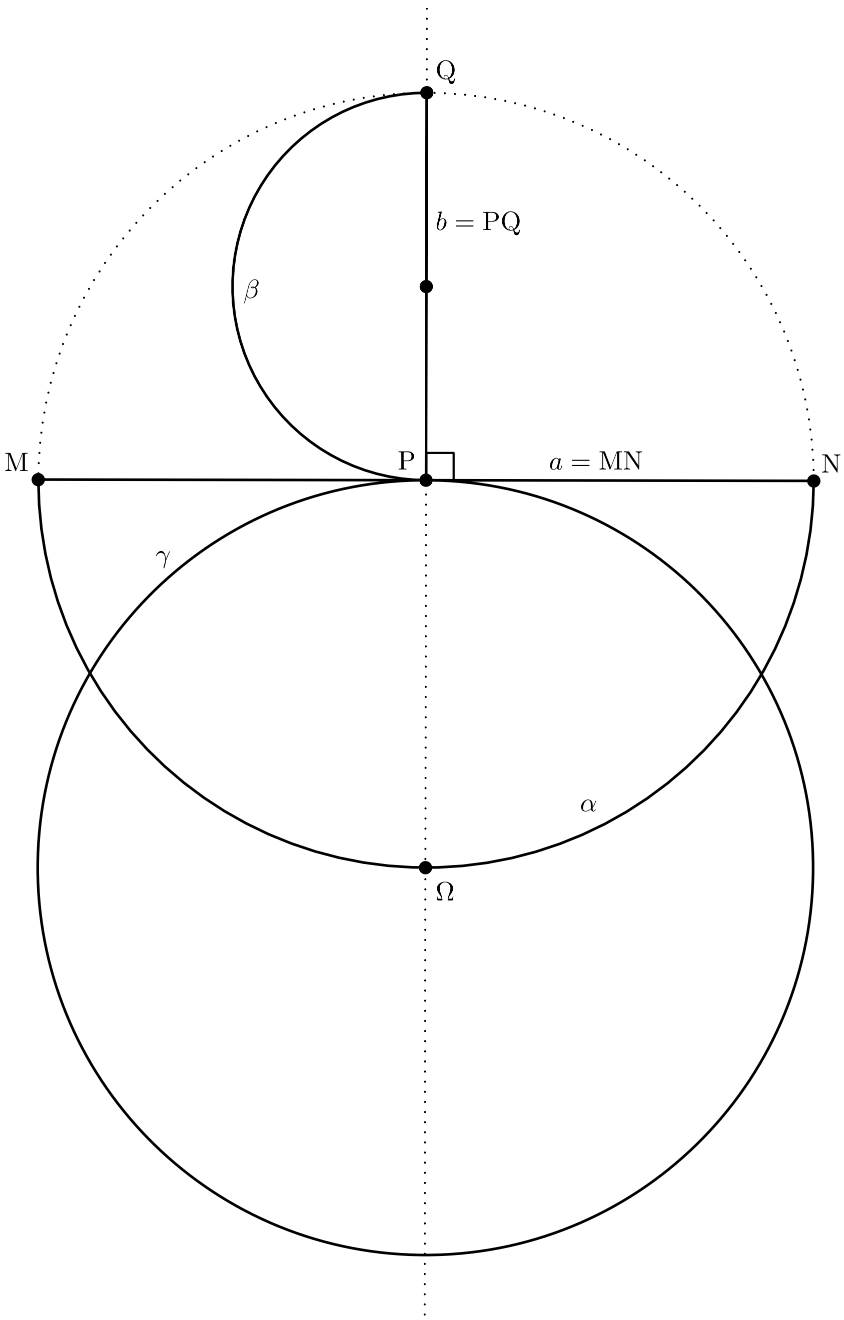
Nom, prénom : ______________________

Annexe du problème 3, partie A



Nom, prénom : ______________________

Annexe du problème 3, partie B



Applications des mathématiques

(Durée 2h40)

REMETTRE SÉPARÉMENT L'ÉPREUVE DE PHYSIQUE ET
CELLE D'APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES

La note de cette épreuve compte pour deux tiers de la note de l'épreuve écrite de l'option spécifique physique et applications des mathématiques.

Matériel autorisé : formulaires officiels non annotés et calculatrices agréées selon liste officielle.

Rédigez complètement les solutions des problèmes proposés ci-dessous.
Les annotations sur les feuilles d'énoncés sont autorisées, mais ne seront pas prises en considération.

Problème 1 (5 points)
Le comité des footballeurs de Chamblandes s'apprête à réaliser un terrain de football synthétique, de 105 m de long et 68 m de large.
Le premier jour, ils commencent par couvrir $1500\,\text{m}^2$. Chaque jour qui suit, ils couvrent les trois quarts de la surface posée la veille. Parviendront-ils à couvrir tout le terrain (justifier) ?

Problème 2 (22 points)

a) (i) Étudier la convergence de $\dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{1}{\ln(3)} + \dfrac{1}{\ln(4)} - \dfrac{1}{\ln(5)} + \cdots + \dfrac{(-1)^k}{\ln(k)} + \cdots$

(ii) Étudier la croissance de la fonction $f(x) = \ln(x) - x$.
En déduire que $\ln(x) < x - 1$, si $x > 1$.

(iii) Étudier la convergence absolue de $\dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{1}{\ln(3)} + \dfrac{1}{\ln(4)} - \dfrac{1}{\ln(5)} + \cdots + \dfrac{(-1)^k}{\ln(k)} + \cdots$

b) (i) Prouver que, si $p > \frac{1}{2}$, la fonction $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^p}$ est décroissante lorsque $x > \dfrac{1}{\sqrt{2p-1}}$.

(ii) Étudier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^p}$ avec $p \in \left]\frac{1}{2}\,;\infty\right[$ grâce au critère de l'intégrale.

Problème 3 (6 points)

a) Déterminer le polynôme de Taylor de degré cinq de la fonction $f(x) = e^x$ pour $a = 0$.

b) Utiliser le résultat précédent pour estimer e.

c) Sachant que $e < 3$, quelle est l'imprécision de cette estimation ?

Problème 4 (14 points)
Déterminer tous les points à coordonnées entières situés sur la droite $637\,x - 119\,y = 35$ et à l'intérieur du disque de rayon 150 centré à l'origine.

Problème 5 (13 points)
Une récolte de riz est répartie équitablement entre trois marchands, qui s'en vont la vendre dans différents marchés, où l'on use de sacs contenant respectivement 83 onces, 110 onces et 135 onces.
Chaque marchand réussit à vendre l'entier des sacs qu'il lui est possible de vendre, si bien qu'il reste 32 onces au premier marchand, 70 onces au deuxième et 30 onces au dernier.
Combien d'onces, au minimum, la récolte contient-elle ?

Problème 6 (10 points)
Alice a pour clé publique $(407, 7)$, alors que Bob a pour clé publique $(1763, 13)$.

a) Quel message crypté faut-il envoyer à Alice pour lui transmettre le message 18 ?

b) Sachant que Bob a choisi deux nombres premiers p et q très proches l'un de l'autre, quelle signature (qu'on ne demande pas de crypter) fera croire à Alice que Bob en est l'auteur ?