Problème 1

$$f(x) = \frac{2x^2 - 12x + 18}{x^2 + 2x - 3}$$

a) • D_f : $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3 ; 1\}$

• zéros : $2(x^2 - 6x + 9) = 2(x-3)^2$, $Z = \{3\}$

		-3		1		3	
$2(x-3)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$+$

b) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \text{"}\frac{72}{0}\text{"} = \infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \text{"}\frac{8}{0}\text{"} = \infty$ donc

il y a des AV d'équation $x = -3$ et $x = 1$.

• $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ AH d'équation $y = 2$. On résout

$f(x) = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 2x^2 + 4x - 6 \Leftrightarrow 16x = 24$.

$\Leftrightarrow x = 3/2$.

Intersection Graphe - AH : $P\left(\frac{3}{2} ; 2\right)$.

c) $$f'(x) = \frac{(4x-12)(x^2+2x-3) - 2(x^2-6x+9) \cdot \overbrace{(2x+2)}^{2(x+1)}}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$= \frac{4(x-3)\left(x^2+2x-3 - \overbrace{(x-3)(x+1)}^{x^2-2x-3}\right)}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{16x(x-3)}{(x^2+2x-3)^2}$$

		-3		0		1		3	
$16x(x-3)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$(x^2+2x-3)^2$	$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗	max	↘		↘	min	↗

Max $(0 ; -6)$

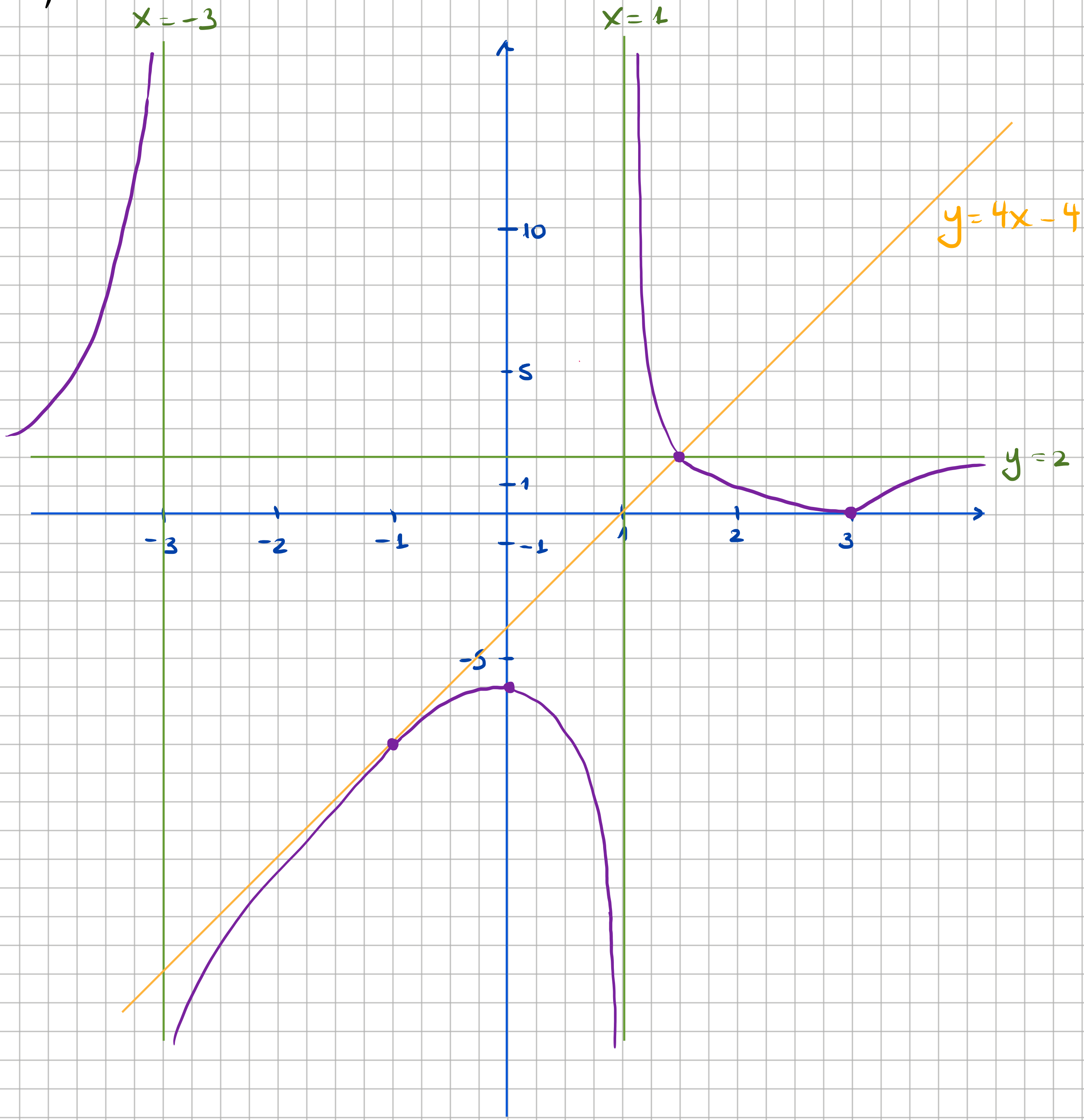
Min $(3 ; 0)$

e) On a $f'(-1) = \frac{-16 \cdot (-4)}{(-4)^2} = 4$ donc $y = 4x + h$

et $f(-1) = \frac{2 + 12 + 18}{1 - 2 - 3} = -8 \Rightarrow h = -8 + 4 = -4$

donc (t): $y = 4x - 4$.

d)



Problème 2

Surface : $12xy + \underbrace{(16-4x)(5-4y)}_{80-20x-64y+16xy} =$

$= 28xy + 80 - 20x - 64y$.

Contrainte : $12xy = 15$ donc $y = \frac{5}{4x}$.

On remplace y par $\frac{5}{4x}$:

$\Rightarrow f(x) = 35 + 80 - 20x - \frac{80}{x} = 115 - 20x - \frac{80}{x}$

Donc $f'(x) = -20 + \frac{80}{x^2} = \frac{80 - 20x^2}{x^2} = \frac{20(4-x^2)}{x^2}$

Valeurs admissibles : $0 \leq x \leq 4$

donc $x = 2m$, et $y = \frac{5}{8} = 0{,}625$

x	0		2		4
$20(4-x^2)$		+	0	−	
x^2	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

Problème 3

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{2x} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \overset{BH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3e^{3x}}{2} = \dfrac{3}{2}$ et

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(x^2-8)}{x-3} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \overset{BH}{=} \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x/(x^2-8)}{1} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x}{x^2-8} = \dfrac{6}{1} = 6$.

b) On résout $x^2+4x+2 = 5x+4 \iff$

$\underbrace{x^2-x-2}_{(x-2)(x+1)} = 0$ donc les courbes se croisent en

$x=-1$ et en $x=2$

De plus $\underbrace{x^2-x-2}_{\cup} < 0$ entre -1 et 2 donc

$x^2+4x+2 < 5x+4$ entre -1 et 2.

$\Rightarrow A = \displaystyle\int_{-1}^{2} \left(5x+4-(x^2+4x+2)\right) dx =$

$= \displaystyle\int_{-1}^{2} (-x^2+x+2)\, dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_{-1}^{2} =$

$= -\dfrac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} - 2\right) = \dfrac{9}{2}$.

MR

Problème 4

a) On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$(d_{AB}) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$

b) $(\Sigma) : (x+2)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = \underbrace{4+4+1}_{=9=3^2}$

donc $C(-2;-2;-1)$ et $r = 3$.

c) On résout

$$\underbrace{(-6+2k+2)^2}_{=(-4+2k)^2} + \underbrace{(-4+k+2)^2}_{(-2+k)^2} + (k+1)^2 = 9 \iff$$

$$16 - 16k + 4k^2 + 4 - 4k + k^2 + k^2 + 2k + 1 = 9 \iff$$

$$6k^2 - 18k + 12 = 0 \iff \underbrace{k^2 - 3k + 2}_{(k-2)(k-1)} = 0$$

donc $k = 1$ et $T_1(-4;-3;1)$ ou $k = 2$ et $T_2(-2;-2;2)$.

d) $\overrightarrow{CT_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $(\pi_1) : 2x + y - 2z = \underset{\uparrow \text{par } T_1}{-13}$

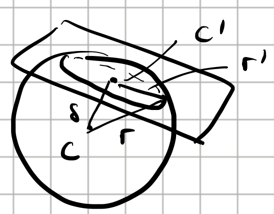
et $\overrightarrow{CT_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $(\pi_2) : z = \underset{\uparrow \text{par } T_2}{2}$

e) On cherche $\pi_1 \cap \pi_2$: $\begin{cases} 2x + y - 2z = -13 \\ z = 2 \end{cases}$

donc $2x + y = -9$. Si $x = k$, $y = -2k - 9$ et $z = 2$.

La droite cherchée a donc pour équation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$



f) On calcule la distance

$$\delta(C;\pi) = \frac{|2 \cdot (-2) - 2 - 5 \cdot (-1) + 16|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{15}{\sqrt{30}} = \frac{15\sqrt{30}}{30} = \frac{1}{2}\sqrt{30}$$

$\cong 2,74 < 3 = r$.

Donc $r' = \sqrt{r^2 - \delta^2} = \sqrt{9 - \frac{15}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

et $C' \in \pi \cap (CC')$ où (CC') = perp. à π par C,

donc (CC') : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

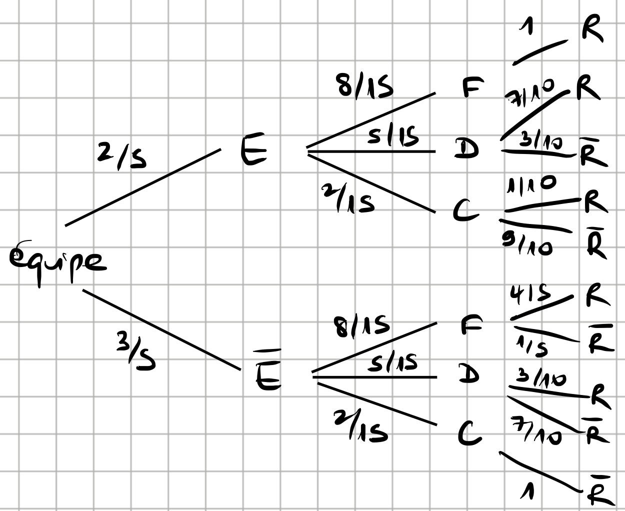
$\Rightarrow$ $2(-2+2k) + (-2+k) - 5(-1-5k) + 16 = 0$ $\Leftrightarrow$

$30k = -15$ donc $k = -\frac{1}{2}$ et $C'\left(-3 ; -\frac{5}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.

Problème 5

Posons E = "joueur experimenté", F = "niveau facile", D = "niveau difficile", C = "niveau cauchemardesque" et R = "réussir".

a)



b) $p(R) = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{8}{15} + \frac{5}{15}\cdot\frac{7}{10} + \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{10}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{8}{15}\cdot\frac{4}{5} + \frac{5}{15}\cdot\frac{3}{10}\right)$

$= \frac{157}{250} = 62,8\,\%$.

c) $p(R\,|\,C) = \frac{p(R\cap C)}{p(C)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\cancel{\frac{2}{15}}\cdot\frac{1}{10}}{\cancel{\frac{2}{15}}} = \frac{1}{25} = 0,04 = 4\,\%$.

d) $p(\bar{E}\,|\,\bar{R}) = \frac{p(\bar{E}\cap\bar{R})}{p(\bar{R})} = \frac{\frac{3}{5}\left(\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{5} + \frac{5}{15}\cdot\frac{7}{10} + \frac{2}{15}\right)}{1-0,628} =$

$= \frac{71}{93} \cong 76,34\,\%$.

e) $B(10;\,7;\,0,628) = C^{10}_{7}\cdot 0,628^{7}\cdot 0,372^{3} \cong 23,80\,\%$.

f) $1 - B(10;\,0;\,0,628) = 1 - 0,372^{10} \cong 99,99\,\%$

Problème 6

a) i) On calcule $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & k-1 & 3 \\ k & 2 & -1 \end{vmatrix}$ (avec $A :=$ cette matrice) $= -k+1+6k-4+k^2-k-6+4$

$= k^2+4k-5 = (k-1)(k+5)$

Donc f est bijective $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1$ et -5.

ii) Si $k=1$, f n'est pas bijective donc $Rg(A) < 3$.

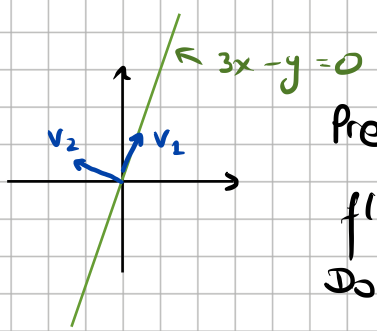
$\ker A_1 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix}$

donc $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -4y+5z=0 \end{cases}$ On pose $z = 4k$, $4y = 20k$
donc $y = 5k$ et $x = -10k+4k = -6k$

$\ker A = \{k(-6;5;4) \mid k \in \mathbb{R}\}$ et une base du noyau est $\{(-6;5;4)\}$.

Donc $Rg(A) = 2$ et l'image de A est engendrée par les colonne de A.

Une base de $\operatorname{Im} f$ est $\{(1;2;1), (2;0;2)\}$
(ou $(1;0;1)$)

b) 

Prenons $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors

$f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = -v_2$.

Donc, relativement à la base $B' = (v_1, v_2)$

la matrice de f est donnée par $D = {}_{B'}(f)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Si B est la base canonique, on a

$${}_B(f)_B = \underbrace{{}_B(id)_{B'}}_{=T=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \cdot D \cdot \underbrace{{}_{B'}(id)_B}_{=T^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Problème 1

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{4x^2+5x}$$

D_f : $4x^2+5x = x(4x+5) = 0 \iff x=0$ ou $x = -\frac{5}{4}$

donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5/4 ; 0\}$

$Z_f = \emptyset$,

		$-5/4$		0	
$f(x)$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$

car $e^{3x} > 0$ pour tout x.

AV : $\lim_{x\to 0} f(x) = \text{"}\frac{1}{0}\text{"} = \infty$ et $\lim_{x\to -5/4} \text{"}\frac{e^{-15/4}}{0}\text{"} = \infty$

donc il y a des AV en $x=0$ et $x = -\frac{5}{4}$.

AH : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \text{"}\frac{0}{\infty}\text{"} = 0$ donc il y a une AH à gauche d'équation $y=0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \overset{BH}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^{3x}}{8x+5} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \overset{BH}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{8} = \infty$$ donc pas d'AH à droite.

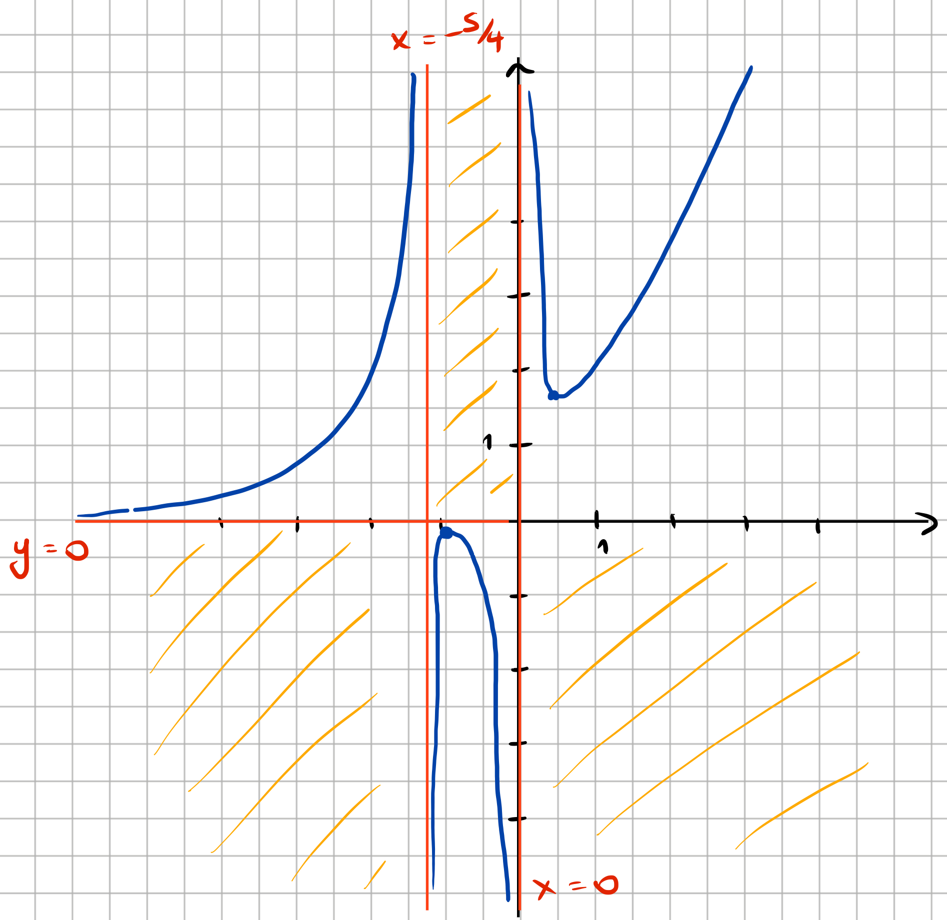
$$f'(x) = \frac{3e^{3x}(4x^2+5x) - e^{3x}(8x+5)}{(4x^2+5x)^2} =$$

$$= \frac{e^{3x}(12x^2+15x-8x-5)}{(4x^2+5x)^2} = \frac{e^{3x}(12x^2+7x-5)}{(4x^2+5x)^2}$$

zéros de f' : $\Delta = 49 + 240 = 289$, $x_{1,2} = \frac{-7 \pm 17}{24}$ $\nearrow 5/12$, $\searrow -1$

		$-5/4$		-1		0		$5/12$	
e^{3x}	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$12x^2+7x-5$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$(4x^2+5x)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	min	$\nearrow$

On a un maximum en $M(-1 ; -0{,}05)$ et un minimum en $m(5/12 ; 1{,}26)$.
$\approx 0{,}42$



Problème 2

a) $V = \text{base} \cdot \text{hauteur} = (24-4)\left(\frac{45}{2} - 2\right) \cdot 2 = 820$

b) $V(x) = (24 - 2x) \cdot \left(\frac{45}{2} - x\right) \cdot x = (540 - 45x - 24x + 2x^2)x$

$= 2x^3 - 69x^2 + 540x$

c) On calcule $V'(x) = 6x^2 - 138x + 540 =$

$= 6(\underbrace{x^2 - 23x + 90}) = 0$

$\Delta = 169, \quad x_{1,2} = \frac{23 \pm 13}{2}$ → 18 ; 5

et x doit être ≤ 12 donc $x = 18$ n'est pas admissible

Valeurs admissibles : $0 \leq x \leq 12$

$V(x)$ est maximum si $x = 5$ cm.

		x_2		10		x_1
$V'(x)$	$+$	0	$-$			
$V(x)$	↗	max	↘			

Problème 3

a) $f(x) = x + \frac{5}{x} > 0$ si $x > 0$

On a $f(x) = 6 \Leftrightarrow x^2 + 5 = 6x \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 6x + 5}_{(x-5)(x-1)} = 0$

On a $f(2) = \frac{9}{2} < 6$ donc

$$A = \int_1^5 \left(6 - x - \frac{5}{x}\right) dx = 6x - \frac{1}{2}x^2 - 5\ln(|x|) \Big|_1^5$$

$$= 30 - \frac{25}{2} - 5\ln(5) - 6 + \frac{1}{2} = 12 - 5\ln(5) \simeq 3{,}95$$

b) $$V = \pi \int_1^2 \underbrace{\left(x + \frac{5}{x}\right)^2}_{x^2 + 10 + \frac{5^2}{x^2}} dx = \pi \int_1^2 \left(x^2 + 10 + \frac{25}{x^2}\right) dx$$

$$= \pi\left(\frac{1}{3}x^3 + 10x - \frac{25}{x}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \pi\left(\frac{8}{3} + 20 - \frac{25}{2} - \frac{1}{3} - 10 + 25\right) = \frac{149\pi}{6}$$

$(\simeq 78{,}02)$

c) L'équation de l'AO est $y = x$

(Avec une division ordinaire, $f(x) = \frac{x^2+5}{x}$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5 & x \\ \hline -x^2 & x \\ \hline 5 & \end{array}$$

donc $y = x$)

Problème 4

a) On a $\frac{\ln(1)}{1} = 0$ et $\frac{1}{1} - 1 = 0$ donc les deux courbes se coupent en $(1;0)$.

De plus, $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{1/x \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

qui vaut 1 si $x=1$ et $\left(\frac{1}{x} - 1\right)' = -\frac{1}{x^2}$ qui

vaut -1 si $x=1$. Donc les deux courbes se coupent bien à angle droit en $(1;0)$.

b) $\Gamma_1 : (x-3)^2 + (y-5)^2 = \underbrace{2+9+25}_{36}$

donc $C_1(3;5)$, $r_1 = 6$

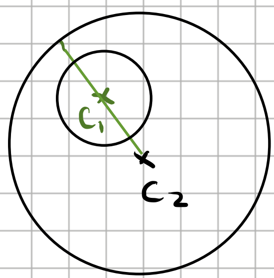
$\Gamma_2 : (x-5)^2 + (y-8)^2 = 2^2$, $C_2(5;8)$ et $r_2 = 2$

$\overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \cong 3,6$

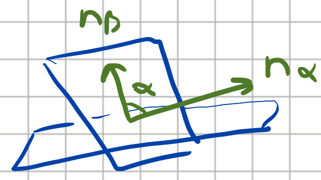
$\Rightarrow \|\overrightarrow{C_1C_2}\| < \overbrace{r_1 - r_2}^{=4}$ donc

C_2 est intérieur à C_1

↳ ils sont donc disjoints.



Probleme 5



a) $\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

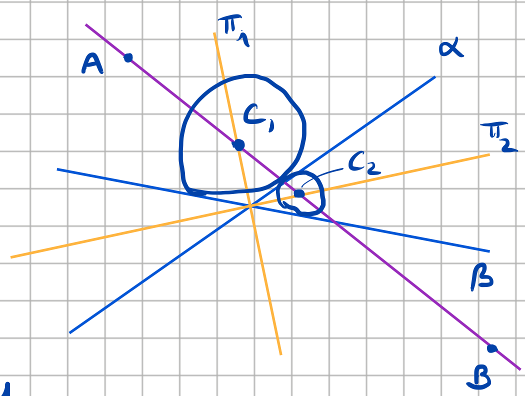
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|} = \frac{-2+4+2}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = \frac{4}{9}$$

donc $\alpha \simeq 63,61°$.

b) $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

donc $(\pi) : 2x - 5y + 6z = -43$.

c) i) On a $\dfrac{2x+2y+z-39}{3} = \pm \dfrac{-x+2y+2z-28}{3}$



$\oplus$ (π_1): $3x - z = 11$

$\ominus$ (π_2): $x + 4y + 3x = 67$

ii) d_{AB} : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -11 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \\ 27 \end{pmatrix}$

$d_{AB} \cap \pi_1$: $3(4-3k) - (-11+27k) = 11$

$\Leftrightarrow -36k = -12$ donc $k = \frac{1}{3}$ et

$C_1(3;4;-2)$, (Σ_1) : $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = \underbrace{r^2}$

où $r = \delta(C_1;\alpha) = \dfrac{|6+8-2-39|}{3} = 9 \Rightarrow 81$

$d_{AB} \cap \pi_2$: $4-3k + 4(-3+21k) + 3(-11+27k) = 67$

$\Leftrightarrow 162k = 108$ donc $k = \frac{2}{3}$ et

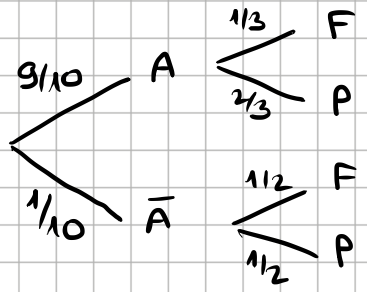
$C_2(2;11;7)$, (Σ_1) : $(x-2)^2 + (y-11)^2 + (z-7)^2 = \underbrace{r^2}$

où $r = \delta(C_2;\alpha) = \dfrac{|4+22+14-39|}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow 1/9$

Problème 6

a) $p(7P \text{ et } 2F) = C_2^9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{512}{2187} \cong 23,41\,\%$

b) A = la pièce est pipée $\quad p(F) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{20} = 35\,\%$



$$p(\bar{A} \mid F) = \frac{p(\bar{A} \cap F)}{p(F)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{7} \cong 14,29\,\%$$

c) On a 2 cas : i) les deux pièces sont pipées

ii) l'une est pipée et l'autre équilibrée.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & p = \frac{C_2^9}{C_2^{10}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{45} \cong 35,56\,\% \\ \text{ii)} & p = \frac{C_1^9 \cdot C_1^1}{C_2^{10}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{15} \cong 6,67\,\% \end{array}\right\}$$

donc la prob. cherchée vaut $42,22\,\% = \frac{19}{45}$

Problème 7

a) $\ker A$: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -L_2 \\ L_3+L_2 \\ L_1+3L_2 \end{matrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{L_3-2L_2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases}$ donc

$\ker A = \{ k(2;-1;1) \mid k \in \mathbb{R} \} = < \overbrace{(2;-1;1)}^{\text{base du noyau}} >$.

Donc $Rg(A) = 2$ et $Im(A) = < \underbrace{(3;-1;1), (2;0;1)}_{\text{base de l'image}} >$

b) $\begin{vmatrix} 3-x & 2 & -4 \\ -1 & -x & 2 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-x & 2 & -4 \\ 0 & 1-x & 1-x \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} L_2+L_3$

$= \begin{vmatrix} 3-x & 2 & -6 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 1 & -2-x \end{vmatrix}_{C_3-C_2} = (1-x)\big(\underbrace{(3-x)(-2-x)}_{x^2-x-6}+6\big)$

$= (1-x)(x^2-x) = -x(x-1)^2$ vp : 0, 1

$E_0 = \ker A = <(2;-1;1)>$

$E_1 = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \{(x;y;z) \mid x+y-2z=0\} = \begin{cases} y = k, \ z = l \\ x = 2l-k \end{cases}$

$= \{ k(-1;1;0) + l(2;0;1) \mid k, l \in \mathbb{R}\}$

$= < (-1;1;0), (2;0;1) >$.

On a $A = {}_B(f)_B = \underbrace{{}_B(id)_{B'}}_{P} \cdot \underbrace{{}_{B'}(f)_{B'}}_{D} \cdot \underbrace{{}_{B'}(id)_B}_{P^{-1}}$

où $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) f est une projection sur le plan $x+y-2z=0$ dans la direction de (d) : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

d) $A^2 = (PDP^{-1})^2 = P\,D^2\,P^{-1} \overset{D^2 = D}{=} PDP^{-1} = A$

e) On a donc $A^n = A$ $\forall\, n \geq 1$ donc les vp et les espaces propres sont les mêmes que ceux de A.

Ex. 1

a) $f(x) = \dfrac{3x(x^2-2)}{x^2-3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$, $Z = \{0, \pm\sqrt{2}\}$

		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$	
$3x$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-2	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-3	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$

C'est une fonction impaire: $f(-x) = -f(x)$

AV: $\lim\limits_{x \to \pm\sqrt{3}} f(x) = \dfrac{"\pm 3\sqrt{3}"}{0} = \infty$, il y a des AV d'équation $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$.

Vu les degrés, il y a une AO:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 6x & x^2-3 \\ \cline{2-2} -(3x^3 - 9x) & 3x \\ \cline{1-1} 3x & \end{array}$$

L'éq de l'AO est $y = 3x$ et $\delta(x) = \dfrac{3x}{x^2-3}$

Le graphe de f coupe l'AO en $P(0;0)$.

b) $f'(x) = \dfrac{(\underbrace{9x^2-6}_{3(3x^2-2)})(x^2-3) - (\underbrace{3x^3-6x}_{3x(x^2-2)}) \cdot 2x}{(x^2-3)^2} =$

$= \dfrac{3(3x^4 - 11x^2 + 6) - 3(2x^4 - 4x^2)}{(x^2-3)^2} = \dfrac{3(\overbrace{x^4 - 7x^2 + 6}^{(x^2-6)(x^2-1)})}{(x^2-3)^2}$

c)

		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$\sqrt{6}$	
$3(x^2-6)$	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2-1	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x^2-3)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	min	$\nearrow$

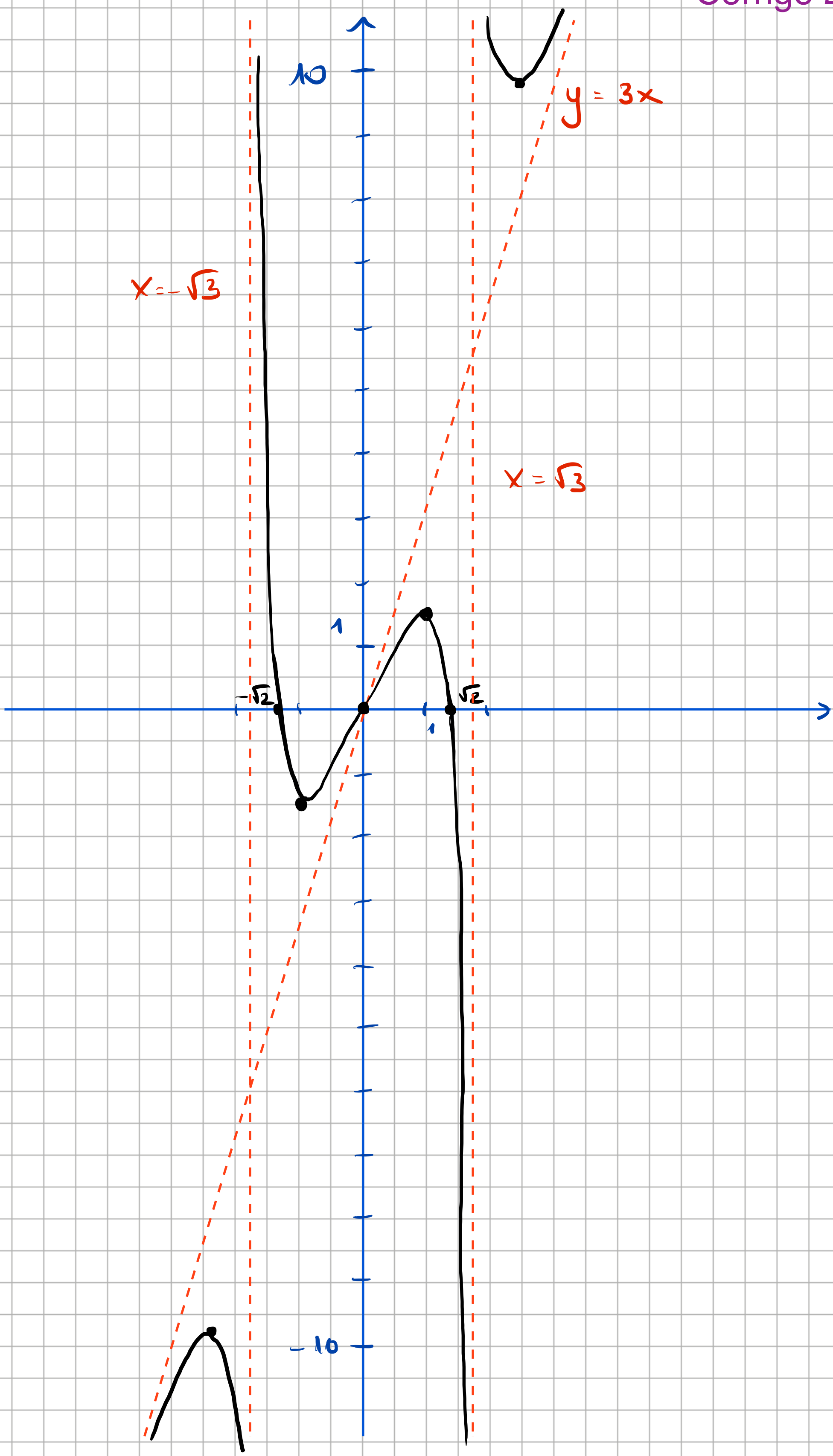
Max $(\underbrace{-\sqrt{6}}_{\cong 2{,}45} ; \underbrace{4\sqrt{6}}_{\cong 9{,}8})$

Min $(\sqrt{6} ; -4\sqrt{6})$

Min $(-1 ; -1.5)$

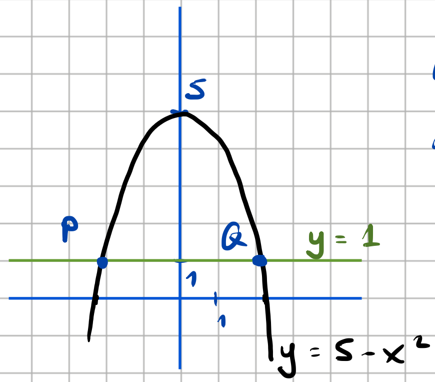
Max $(1 ; 1{,}5)$

d)



Ex. 2

b.)



La courbe $y = 5 - x^2$ est une parabole concave de sommet $S(0;5)$.

Les points P et Q ont pour abscisses les x tels que $5 - x^2 = 1$ donc $x^2 = 4$ et $x = \pm 2$.

Ainsi $P(-2;1)$ et $Q(2;-1)$.

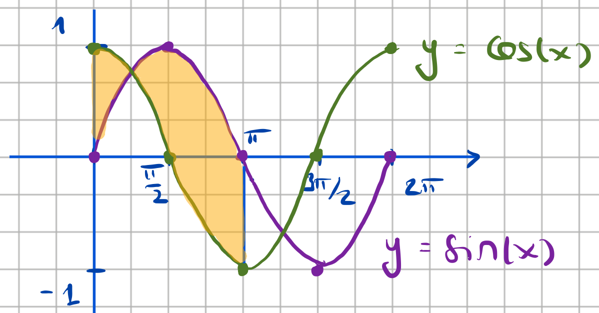
La courbe $y = 5 - x^2$ est au-dessus de $y = 1$ entre -2 et 2.

Donc $V = \pi \int_{-2}^{2} ((5-x^2)^2 - 1)\,dx$ $\left(\text{ou } 2\pi \int_{0}^{2} ((5-x^2)^2 - 1)\,dx\right)$

$= \pi \int_{-2}^{2} (x^4 - 10x^2 + 24)\,dx = \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 24x \right) \Big|_{-2}^{2}$

$= \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{80}{3} + 48 \right) \cdot 2 = \pi \cdot \frac{416}{15} \cdot 2 = \frac{832\pi}{15} \cong 174{,}25$

a)



$\sin(x) = \cos(x) \iff$

$\tan(x) = 1 \iff$

$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \; k \in \mathbb{Z}$

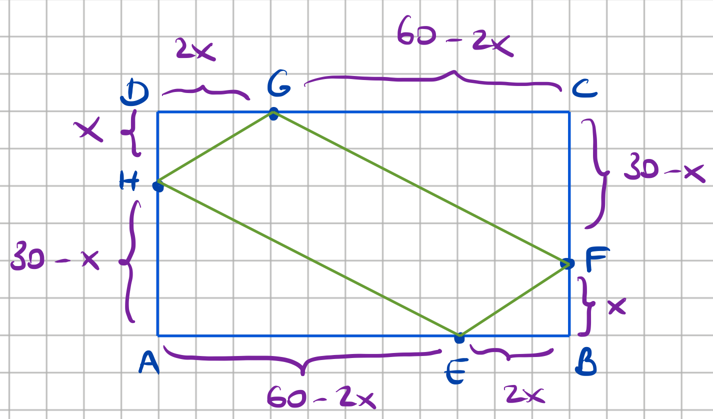
$A = \int_{0}^{\pi/4} (\cos(x) - \sin(x))\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin(x) - \cos(x))\,dx =$

$= (\sin(x) + \cos(x)) \Big|_{0}^{\pi/4} + (-\cos(x) - \sin(x)) \Big|_{\pi/4}^{\pi} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 + 1 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \cong 2{,}83$

Ex. 3

L'aire du parallélogramme EFGH s'obtient en enlevant à l'aire du rectangle ABCD les aires des quatre triangles rectangles.



Donc

$$f(x) = 60 \cdot 30 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x + \\ - 2 \cdot \frac{1}{2} (60 - 2x)(30 - x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 1800 - 2x^2 - (1800 - 120x + 2x^2) \\ = -4x^2 + 120x$$

Les valeurs admissibles pour x sont $[0; 30]$.

On a $f'(x) = -8x + 120$ qui s'annule en $x = 15$, qui est positive avant 15 et négative après.

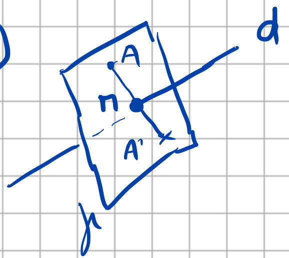
L'aire est donc maximale pour $x = 15$ et vaut alors 900.

Problème 4 (GA)

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

donc $(\beta): \; 2x - y + 2z = -1$

b)



Soit μ le plan perpendiculaire à d passant par A. Alors

$(\mu): \; x - y - z = -7$

$\mu \cap d : \; (-\lambda) - (-2+\lambda) - (3+\lambda) = -7 \iff$

$3\lambda = 6$ donc $\lambda = 2$ et $M(-2;0;5)$

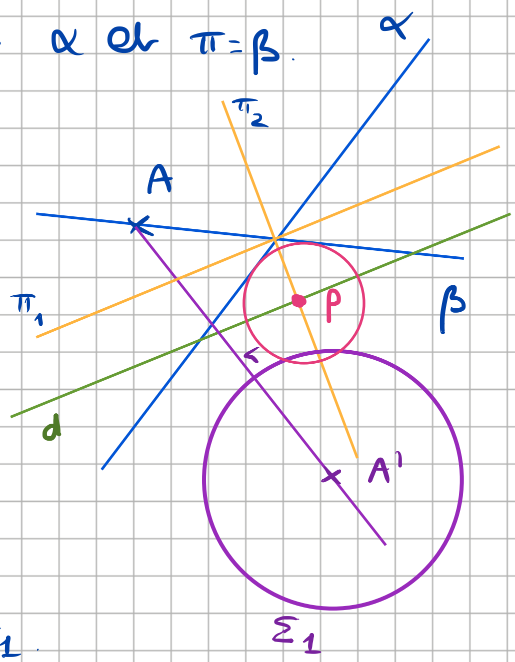
Finalement $\vec{OA'} = \vec{OM} + \vec{AM} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

donc $A'(-1;-1;7)$.

$\Rightarrow (\Sigma_1): \; (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 = 16$.

c) Déterminons le plan bissecteur de α et $\pi = \beta$.

$$\frac{x + 2y - 2z - 1}{3} = \pm \frac{2x - y + 2z + 1}{3}$$



$\oplus$ $(\pi_1): \; x - 3y + 4z = -2$

$\ominus$ $(\pi_2): \; 3x + y = 0$

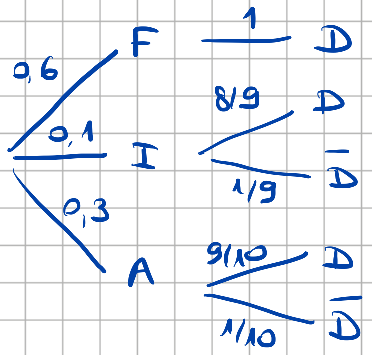
$\pi_1 \cap d : \; -\lambda - 3(-2+\lambda) + 4(3+\lambda) = -2$

$\Rightarrow 18 = -2$ ↯

La droite d est parallèle au plan π_1.
Il n'y a donc bien qu'une sphère.

Ex 5

a) On note F = "un seul chiffre faux", I = "inversion de deux chiffres", A = "ajout ou oubli d'un chiffre". Puis D = "le clef de contrôle detecte l'erreur".



b) $p(D) = 0,6 + 0,1 \cdot \frac{8}{9} + 0,3 \cdot \frac{9}{10} =$

$= \frac{863}{900} \cong 95,89\,\%$

c) C'est une prob. conditionnelle :

$p(F \mid D) = \frac{p(F \cap D)}{p(D)} =$

$= \frac{0,6 \cdot 1}{863/900} = \frac{540}{863} \cong 62,57\,\%$.

d) $p(D \mid \bar{A}) = \frac{p(D \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{0,6 + 0,1 \cdot 8/9}{0,6 + 0,1} = \frac{62}{63} \cong 98,41\,\%$

e) $p(8 \text{ CB detectes}) = C_8^{10} \left(\frac{863}{900}\right)^8 \cdot \left(\frac{37}{900}\right)^2 \cong 5,44\,\%$

f) $p(\bar{D} \text{ sur au moins un}) = 1 - p(10 \text{ CB detectes}) =$

$= 1 - \left(\frac{863}{900}\right)^{10} \cong 34,28\,\%$.

$\pi_2 \cap d : \quad 3(-\lambda) + (-2+\lambda) = 0 \iff 2\lambda = -2$ donc

$\lambda = -1$ et $P(1 ; -3 ; 2)$.

$$r_2 = \delta(P ; \alpha) = \frac{|1-6-4-1|}{3} = \frac{10}{3}.$$

Et $\|\overrightarrow{A'P}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{33} \cong 5{,}74 < r_1 + r_2$.

donc les sphères sont sécantes.

Problème 6 (AL)

a) $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 3-x & -4 & 4 \\ 2 & -3-x & 2 \\ -1 & 1 & -2-x \end{vmatrix} =$

$$\underset{C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 4 \\ 2 & -1-x & 2 \\ -1 & -1-x & -2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 4 \\ 2 & -1-x & 2 \\ -3 & 0 & -4-x \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3-L_2 \end{matrix} =$$

$$= -(1+x)\left((3-x)\cdot(-4-x)+12\right) = -(1+x)(x^2+x)$$

$= -x(x+1)^2$. Donc les vp sont -1 et 0.

b) $E_0 = \ker A$.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -L_3 \\ L_2 \\ L_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1+L_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

donc $z = -k$, $x = 4k$ et $y = 2k$. Ainsi

$$E_0 = \langle \underbrace{(4 ; 2 ; -1)}_{B_0} \rangle \overset{=v_1}{} .$$

E_{-1} : $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si $y = k$, $z = l$, $x = k - l$ donc

$E_{-1} = \langle \underbrace{\overset{= v_2}{(1;1;0)}, \overset{= v_3}{(-1;0;1)}}_{B_{-1}} \rangle$ (c'est le plan $x - y + z = 0$).

c) $A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{_{B_d}(\alpha)_{B_d}}$ et $\underset{\sim}{P} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad {}_{B}(id)_{B_d}$

(où $B_d = B_0 \cup B_{-1}$)

d) Si $\underline{v} \in E_0$, $A^2\underline{v} = A(A\underline{v}) = A \cdot \underline{0} = \underline{0}$.

Si $\underline{v} \in E_{-1}$, $A^2\underline{v} = A(A\underline{v}) = A(-\underline{v}) = -A\underline{v} = -(-\underline{v}) = \underline{v}$

donc les vp de A^2 sont 0 et 1.

A^2 est une projection sur (π) : $x - y + z = 0$

en direction de $\underline{v_3} = (4;2;-1)$

(22) Problème 1

$$f(x) = \left(27 \cdot \left(\frac{5}{x^4} - \frac{30}{x^6}\right)\right) = \frac{135(x^2-6)}{x^6}$$

a) zeros : $\{\pm\sqrt{6}\}$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^*$

		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$	
$135(x^2-6)$	+	0	−	|	−	0	+
x^6	+	|	+	0	+	|	+
$f(x)$	+	0	−	||	−	0	+

(f est une fonction paire)

AV : $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, AV : $x = 0$

AH : $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, AH : $y = 0$ (les intersections de l'AH avec le graphe sont les zeros)

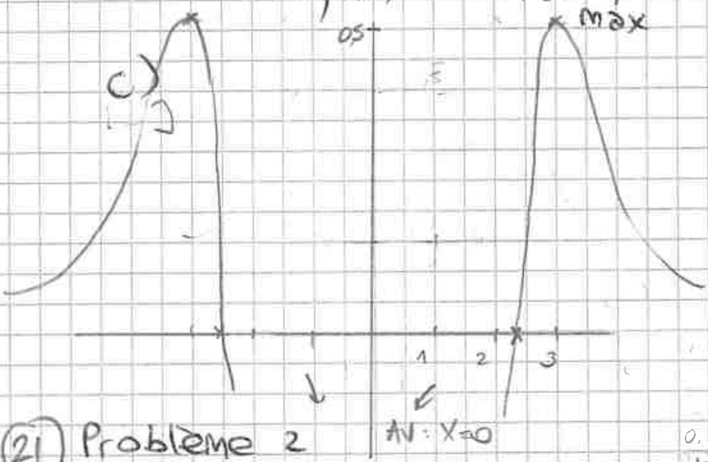
b) $$f'(x) = \frac{135 \cdot 2x \cdot x^6 - 135(x^2-6)\cdot 6x^5}{x^{12}} = \frac{540(9-x^2)}{x^7}$$

		-3		0		3	
$540(9-x^2)$	−	0	+	|	+	0	−
x^7	−	|	−	0	+	|	+
$f'(x)$	+	0	−	||	+	0	−
$f(x)$	↗	max	↘	||	↗	max	↘

(f' est une fonction impaire)

Max en $(-3; \frac{5}{9})$ et en $(3; \frac{5}{9})$

c) [..]



d) [3] $P(1; -675)$

$f'(1) = 4320$

(t) : $y = 4320x - 4995$

(21) Problème 2

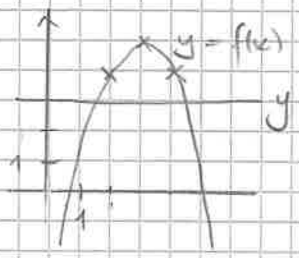
a) Div. euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 6x^2 + x + 1 & 2x+1 \\ \hline -(6x^2+3x) & 3x-1 \\ -2x+1 & \\ -(-2x-1) & \\ 2 & \end{array}$$

donc $$\int \frac{6x^2+x+1}{2x+1}\,dx = \int \left(3x - 1 + \frac{2}{2x+1}\right) dx =$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - x + \ln(|2x+1|) + C.$$

b)



$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x-2) = 0$.

Vu le dessin, $A = \int_2^4 (-x^2 + 6x - 4 - 4)\,dx =$

$= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x\right)\Big|_2^4 = -\frac{64}{3} + 48 - 32 + \frac{8}{3} - 12 + 16 = \frac{4}{3}$.

c) On résout $\cos(3x+\pi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$f'(x) = -3\sin(3x+\pi)$

$\begin{cases} 3x + \pi = \frac{\pi}{3} + k_1 \cdot 2\pi \\ 3x + \pi = -\frac{\pi}{3} + k_2 \cdot 2\pi \end{cases}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = -\frac{2\pi}{9} + k_1 \cdot 2\pi/3 \\ x = -\frac{4\pi}{9} + k_2 \cdot 2\pi/3 \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

d) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x/2}}{\ln(x+1)} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \overset{BH}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}e^{-x/2}}{1/(x+1)} = \frac{1}{2}$

11 Problème 3

Volume : x^2y

Contrainte : $360(2x^2+2xy)+240xy = 54'000 \quad | :240$

$3x^2+3xy+xy = 225 \Leftrightarrow$

$3x^2+4xy = 225$

Donc $y = \dfrac{225-3x^2}{4x} = \dfrac{225}{4x} - \dfrac{3}{4}x$

On veut maximiser $f(x) = \dfrac{225}{4}\cdot x - \dfrac{3}{4}x^3$.

On a $f'(x) = \dfrac{225}{4} - \dfrac{9}{4}x^2$ qui s'annule en $x = \pm 5$

	0		5	
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗		↘

Valeurs admissibles : $x, y \geq 0$

Le volume est donc maximal pour $x = 5m$, $y = 7{,}5m$

(13) Problème 5

a) $P(3 \text{ épicéas}) = 0{,}44^3 \cong 8{,}52\,\%$

b) Il y a $100 - 44 - 18 - 15 = 23\,\%$ de telles espèces

Donc $p = (0{,}23)^7 \cong 0{,}0034\,\% < 0{,}01\,\%$.

c) $p = 1 - (1 - 0{,}18)^5 \cong 62{,}93\,\%$

d) $C^5_2 \cdot C^3_1 \cdot C^2_2 \cdot 0{,}44^2 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}15^2 \cong 2{,}35\,\%$.

e) $p(\text{sapin} \mid \text{sapin ou épicéa}) = \dfrac{0{,}15}{0{,}15 + 0{,}44} \cong 25{,}42\,\%$.

16 **Problème 4**

a) (Σ_1) : $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2 = \underbrace{31+4+1}_{=36}$

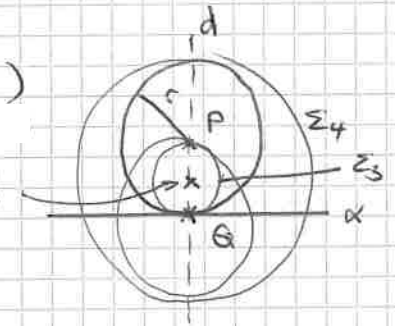
donc $P(2;-1;0)$, $r=6$.

b) On a $\vec{AB} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\6\\3\end{pmatrix}$

donc (α) : $2x-2y-z=-12$

On a $\delta(P,\alpha) = \dfrac{|2\cdot 2+2\cdot 1+12|}{\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{18}{3} = 6 = r$.

c)



d = perpendiculaire à α par P.

(d) : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $k\in\mathbb{R}$

$Q = d \cap \alpha$

$2(2+2k)-2(-1-2k)-(-k) = -12 \Leftrightarrow 9k=-18$

donc $k=-2$ et $Q(-2;3;2)$

Donc (Σ_2) : $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-2)^2 = 36$.

d) Appelons Σ_3 et Σ_4 ces deux sphères, (cf. figures) centrées en $R = M_{PQ}$, $R(0;1;1)$ et de rayon

$r_3 = \frac{6}{2} = 3$ et $r_4 = 9$

Donc (Σ_3) : $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 9$

(Σ_4) : $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 81$.

12 **Problème 6**

Partie A

a) $A \sim \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\0&6&0\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ 1/3\,L_2\\ L_3+2L_1\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \begin{matrix}L_1-2L_2\\ \\ L_3-6L_2\end{matrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=z\\y=0\end{cases}$ donc $\ker A = \langle (1;0;1) \rangle$.

Base $((1;0;1))$

b) $A\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\9\\12\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$, valeur propre 3.

On a $E_3 = \ker(A-3I) = \ker\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \ker\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc c'est le plan $-2x+2y-z=0$

$\Leftrightarrow z = -2x+2y$. Donc $E_3 = \langle (1;0;-2), (0;1;+2) \rangle$

c) Oui, elle est diagonalisable car $\mathcal{B} = ((1;0;1), (1;0;-2), (0;1;2))$ est une base de vecteurs propres

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Corrige 2019 3Mr

Solution 1. (18 points)

La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et f s'annule si $2\,x^3 = 0$, donc en $x = 0$.
Le signe de f est le suivant

x		0		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$

S'il y a une AV, c'est en $x = 1$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2\,x^3}{(x-1)^2} = \infty$, la fonction f admet la droite $x = 1$ comme asymptote verticale.

Comme le numérateur est de degré un de plus que le dénominateur, il y a une AO (que l'on peut obtenir par division euclidienne par exemple), d'équation $y = 2x + 4$.

La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = \frac{6x^2(x-1)^2 - 2x^3(2x-2)}{(x-1)^4} = \frac{6x^2(x-1) - 4x^3}{(x-1)^3} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$$

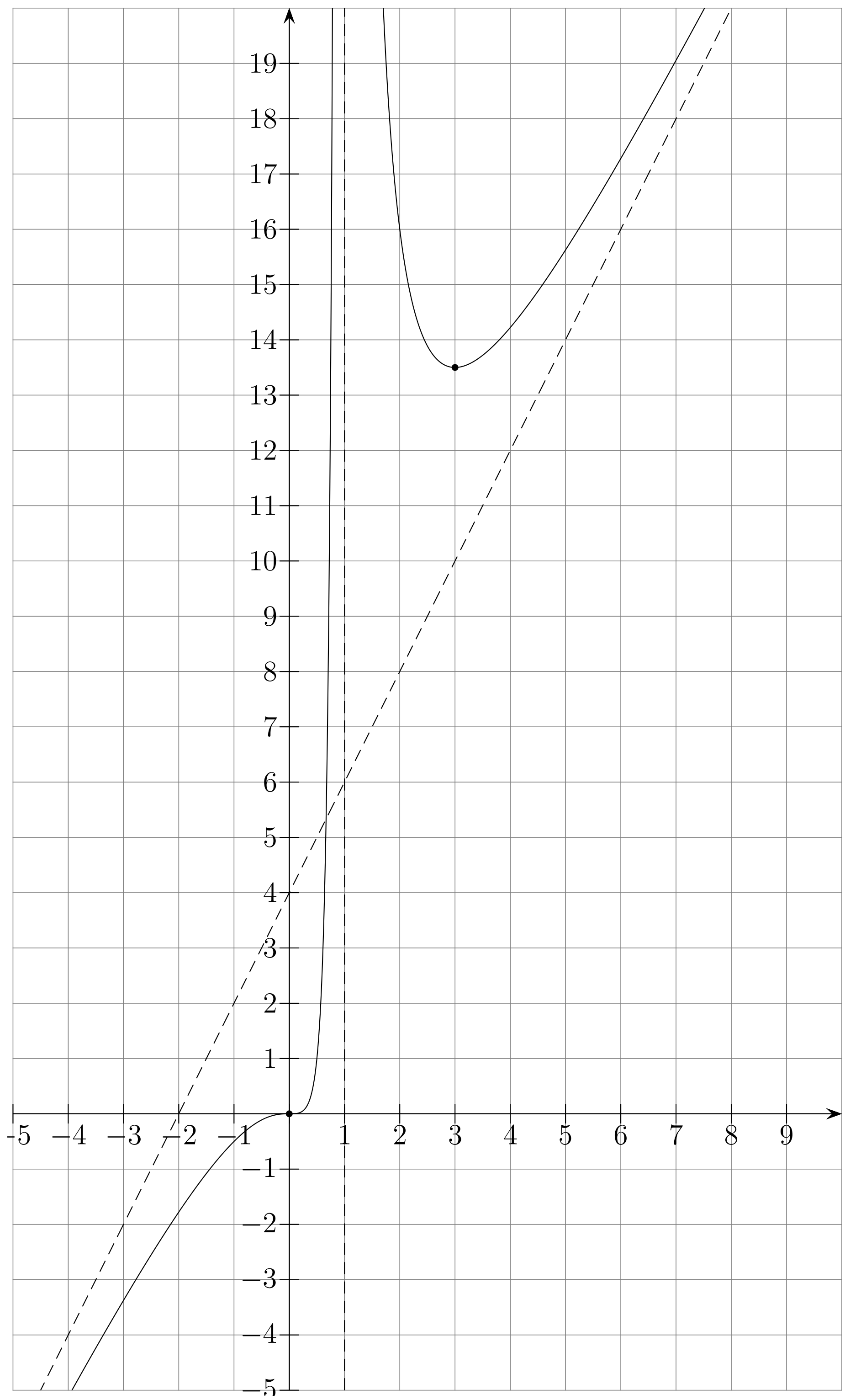
Elle s'annule si $x \in \{0; 3\}$, et f' n'est pas définie en $x = 1$. D'où le signe de f' et la croissance de f :

x		0		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

On a $f(0) = 0$ et c'est le point $(0; 0)$ est un point à tangente de pente nulle.

On a $f(3) = 13,5$, c'est le point $(3; 13,5)$ est minimum local.

Corrige 2019 3Mr



Solution 2. (13 points)

Partie A

a) On a $f(x) = x^2(2 - \sqrt{x})$, donc les zéros de f sont 0 et 4.

b) L'aire du domaine vaut

$$\int_0^4 \left(2\,x^2 - x^{2+\frac{1}{2}}\right)\,dx = \frac{2}{3}\,x^3 - \frac{2}{7}\,x^{\frac{7}{2}}\,\Big|_0^4 = \frac{128}{3} - \frac{256}{7} = \frac{128}{21} \cong 6,095$$

Partie B

a) On a $g(4) = 1$ et $h(4) = 1$, donc $(4;1)$ est bien un point d'intersection des graphes. De même $g(7) = 2$ et $h(7) = 2$ donc $(7;2)$ est le deuxième point.

b) Le volume du solide vaut

$$\pi\int_4^7 \left(\frac{1}{9}(x-1)^2 - \frac{4}{8-x}\right)\,dx = \pi\left(\frac{1}{27}(x-1)^3 + 4\ln(|8-x|)\right)\Big|_4^7 =$$

$$= \pi\,(8 - 1 + 0 - 4\ln(4)) = \pi(7 - 4\ln(4)) \cong 4,57$$

Solution 3. (9 points)

a) On résout $e^{2x} = e^{-x}$, donc $3x = 0$ et $x = 0$. Ainsi $(0;1)$.

On a $f'(x) = 2e^{2x}$, $f'(0) = 2$ (donc $(t_f) : y = 2x + 1$) et $g'(x) = -e^{-x}$, $g'(0) = -1$ (donc $(t_g) : y = -x + 1$).

Appelons α l'angle cherché, alors $\tan(\alpha) = \left|\dfrac{2-(-1)}{1-2}\right| = |-3|$, donc $\alpha \cong 71,56°$.

b) On veut que $f'(a) = -\dfrac{1}{g'(a)}$, donc $2e^{2a} = \dfrac{-1}{-e^{-a}}$, donc $e^a = \dfrac{1}{2}$ et ainsi $a = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cong -0,69$.

Solution 4. (10 points)

La contrainte est $x + y = 5$ ou $y = 5 - x$.

Le volume du solide est donné par $\pi \cdot (2x)^2 \cdot y + \dfrac{4}{2\cdot 3} \cdot \pi \cdot x^3$.

La fonction à optimiser est donc $f(x) = 4\pi x^2(5-x) + \dfrac{2\pi}{3}\,x^3$, donc $f(x) = \dfrac{\pi}{3}\,(60x^2 - 10x^3)$.

Sa dérivée vaut $f'(x) = \dfrac{10\pi}{3}\,(12x - 3x^2) = \dfrac{10\pi}{3}\,3x(4-x)$.

La croissance de f est la suivante (il faut que $x \in [0; +\infty[$).

x		0		4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

Le volume est donc maximum lorsque $x = 4$ et $y = 1$.

Solution 6 (15 points)

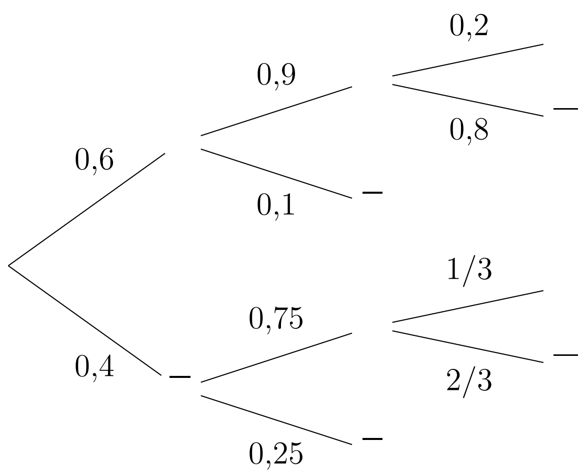
Partie A

a) On a $\ {}^{10}_{3} = 120$.

b) C'est une permutation avec répétition : $\dfrac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$.

Partie B

On note l'événement "la saison a été favorable", : "les légumes ont bien poussés" et : "le voisin est venu chaparder".



c) $\left(\overline{\ }\right) = 0.6 \cdot 0.1 + 0,4 \cdot 0,25 = 16\%$.

d) $(\ \ ) = 0,6 \cdot 0,9 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,75 \cdot \frac{1}{3} = 20,8\%$.

e) $(\overline{\ } \mid \overline{\ }) = \dfrac{(\overline{\ } \cap \overline{\ })}{(\overline{\ })} = \dfrac{0,4 \cdot 0,25}{0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,25} = 62,5\%$.

f) $(\ \ ) = 1 - 0,16 = \dfrac{21}{25}$ donc $p = \ {}^{10}_{9} \left(\dfrac{21}{25}\right)^{9} \cdot \left(\dfrac{4}{25}\right) + \left(\dfrac{21}{25}\right)^{10} \cong 50,8\%$.

Corrige 2019 3Mr

Solution 5 (11 points)

a) On a $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\quad} \times \overrightarrow{\quad} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, par conséquent

$(\alpha) : 2x + y + 4z = 28.$

b) On a $(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$

c) Le rayon r de la sphère vaut $r = \delta(\ ;\alpha) = \dfrac{|20 - 2 + 52 - 28|}{\sqrt{21}} = \dfrac{42\sqrt{21}}{21} = 2\sqrt{21}$. Donc

$$(\Sigma_1) : (x-10)^2 + (y+2)^2 + (z-13)^2 = 84$$

d) Appelons $_2$ le centre de la sphère et posons $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Alors

$$\overrightarrow{\quad}_2 = \overrightarrow{\quad} + \frac{\frac{1}{2}r}{||\overrightarrow{v}||}\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$_2(12; -1; 17)$ et $r_2 = \sqrt{21}.$

Solution 7. (17 points)

a) On calcule le déterminant de cette matrice

$$\det(\ _k) = -4k(k+8) + 72 + 72 + 36k - 48 - 12(k+8) = -4k^2 - 8k = -4k(k+2)$$

Donc α_k n'est pas inversible si et seulement si $k \in \{0; -2\}$.

b) Si $k = 0$, la matrice n'est pas inversible. On a

$$\ker(\ \ ) = \ker\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -2 \\ -18 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le noyau de est composé des vecteurs $(x; y; z)$ avec $2x - y - z = 0$ et $3y + z = 0$. En posant $y = k$, on en tire $z = -3k$ et $x = -k$. Par conséquent, le noyau de possède la base $\{(-1; 1; -3)\}$.

Par le théorème du rang, l'image de est de dimension 2, et elle est engendrée par les colonnes de . On peut choisir $\{(1; 0; 3), (1; -1; 4)\}$ comme base de l'image de .

c) On détermine le polynôme caractéristique de :

$$p(x) = \det\begin{pmatrix} -4-x & 2 & 2 \\ 6 & -x & -2 \\ -18 & 6 & 8-x \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2-x & 2-x & 0 \\ 6 & -x & -2 \\ -18 & 6 & 8-x \end{pmatrix} \begin{array}{l} _1 + \ _2 \\ _2 \\ _3 \end{array} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 2-x & 0 \\ 6+x & -x & -2 \\ -24 & 6 & 8-x \end{pmatrix} = -(2-x)((6+x)(8-x) - 48) =$$

$$= (x-2)\left(-x^2 + 2x\right) = -x(x-2)^2$$

où la troisième matrice s'obtient en remplaçant le première colonne par cette colonne moins la deuxième colonne. Les valeurs propres sont donc 0 et 2.

Nous savons déjà que $_0 = \ker(\ \ ) = \langle(-1; 1; -3)\rangle$.

Calculons

$$_2 = \ker\begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & -2 \\ -18 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $_2$ correspond au plan d'équation $3x - y - z = 0$. En posant $x = k$ et $y = l$, nous avons alors $(x; y; z) = k(1; 0; 3) + l(0; 1; -1)$, donc $_2 = \langle(1; 0; 3), (0; 1; -1)\rangle$.

Par conséquent, $\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\ = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

d) Si v est un vecteur propre de associé à la valeur propre λ, alors

$$^4 v = \ ^3 \lambda v = \ ^2 \lambda^2 v = \ \lambda^3 v = \lambda^4 v$$

donc v est un vecteur propre de ^{4} associé à la valeur propre λ^4. Par conséquent, les espaces propres de ^{4} sont les mêmes que ceux de mais pour les valeurs propres 0 et 16 respectivement. Plus précisément, $_0 = \langle(-1; 1; -3)\rangle$ et $_{16} = \langle(1; 0; 3), (0; 1; -1)\rangle$.