Problème 1

$$f(x) = \frac{2x^2 - 12x + 18}{x^2 + 2x - 3}$$

a) • D_f : $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;\,1\}$

• zéros : $2(x^2 - 6x + 9) = 2(x-3)^2$, $Z = \{3\}$

		-3		1		3	
$2(x-3)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$

b) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \text{"}\frac{72}{0}\text{"} = \infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \text{"}\frac{8}{0}\text{"} = \infty$ donc

il y a des AV d'équation $x = -3$ et $x = 1$.

• $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ AH d'équation $y = 2$. On résout

$f(x) = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 2x^2 + 4x - 6 \Leftrightarrow 16x = 24$.

$\Leftrightarrow x = 3/2$.

Intersection Graphe - AH : $P\left(\frac{3}{2}\,;\,2\right)$.

c) $$f'(x) = \frac{(4x-12)(x^2+2x-3) - 2(x^2-6x+9)\cdot\overbrace{(2x+2)}^{2(x+1)}}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$= \frac{4(x-3)\left(x^2+2x-3 - \overbrace{(x-3)(x+1)}^{x^2-2x-3}\right)}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{16x(x-3)}{(x^2+2x-3)^2}$$

		-3		0		1		3	
$16x(x-3)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$(x^2+2x-3)^2$	$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

Max $(0\,;\,-6)$

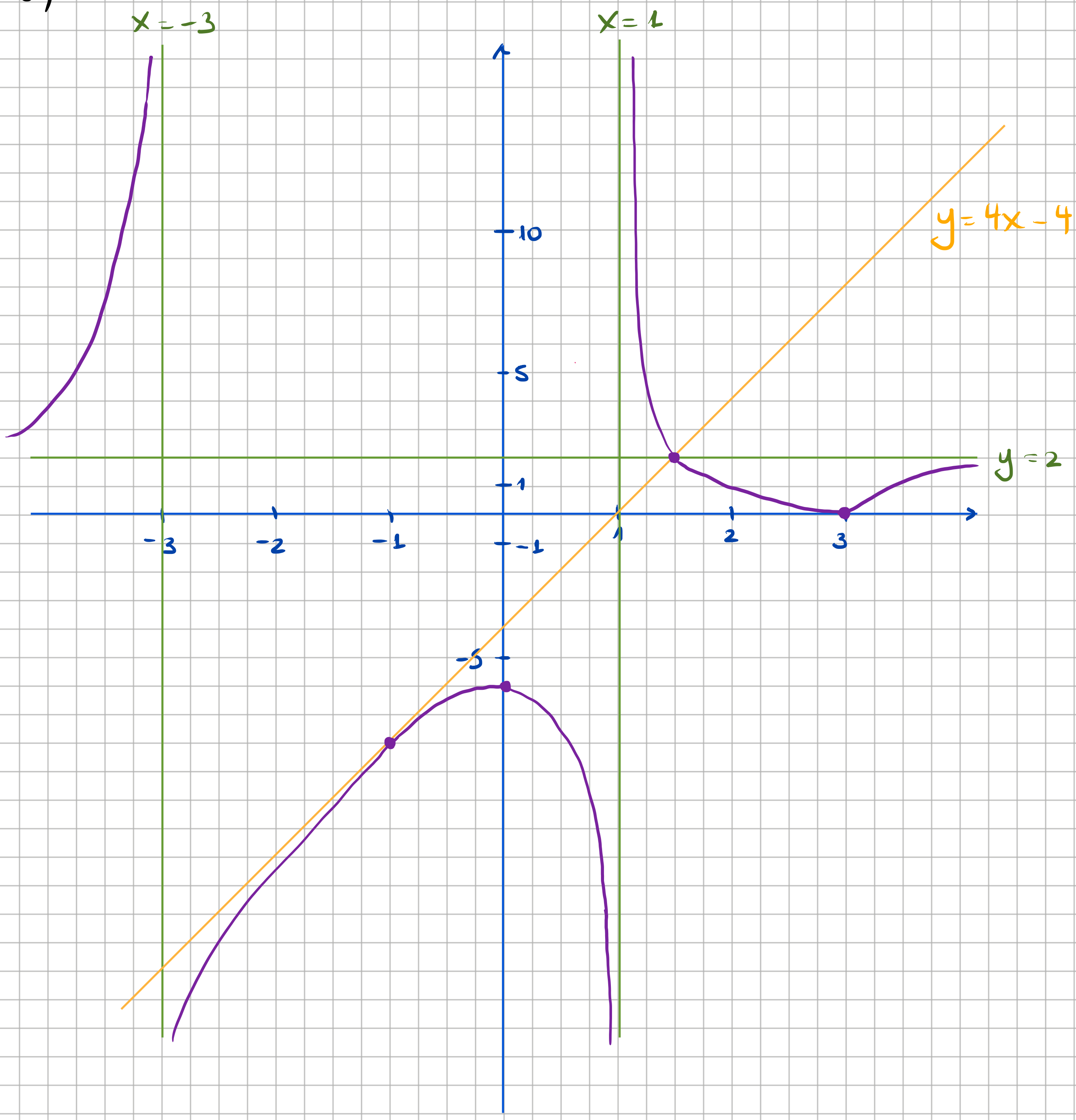
Min $(3\,;\,0)$

e) On a $f'(-1) = \frac{-16\cdot(-4)}{(-4)^2} = 4$ donc $y = 4x + h$

et $f(-1) = \frac{2+12+18}{1-2-3} = -8 \Rightarrow h = -8 + 4 = -4$

donc (t): $y = 4x - 4$.

d)



Problème 2

Surface : $12xy + \underbrace{(16-4x)(5-4y)}_{80-20x-64y+16xy} =$

$= 28xy + 80 - 20x - 64y$.

Contrainte : $12xy = 15$ donc $y = \frac{5}{4x}$.

On remplace y par $\frac{5}{4x}$:

$\Rightarrow f(x) = 35 + 80 - 20x - \frac{80}{x} = 115 - 20x - \frac{80}{x}$

Donc $f'(x) = -20 + \frac{80}{x^2} = \frac{80-20x^2}{x^2} = \frac{20(4-x^2)}{x^2}$

Valeurs admissibles : $0 \leq x \leq 4$

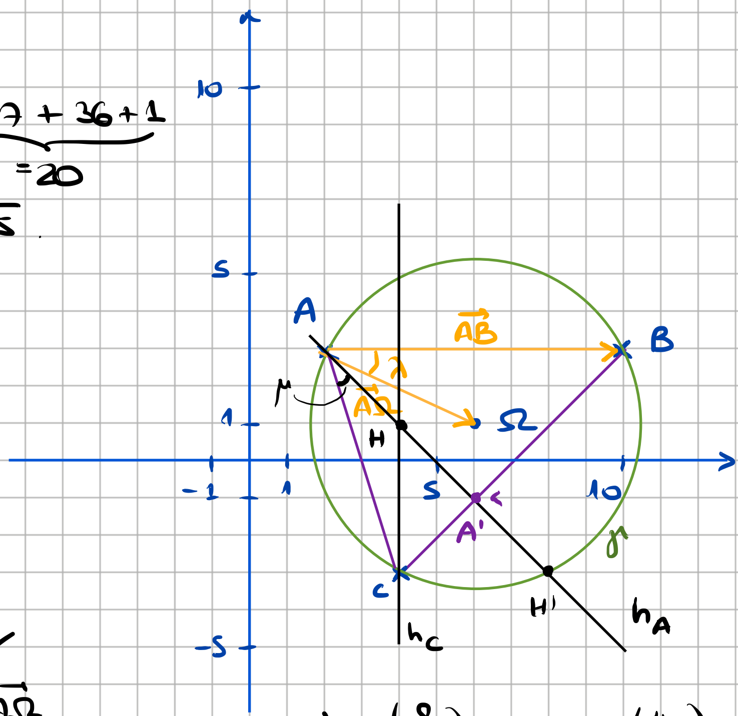
donc $x = 2m$, et $y = \frac{5}{8} = 0{,}625$

x	0		2		4
$20(4-x^2)$		$+$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Probleme 3

a) $(x-6)^2+(y-1)^2=\underbrace{-17+36+1}_{=20}$

$\Omega(6;1)$, $r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.



b) On vérife que

$A, B, C \in \gamma$.

A: $(-4)^2+2^2=20$ ✓

B: $4^2+2^2=20$ ✓

C: $(-2)^2+(-4)^2=20$ ✓

c) On a $\cos(\lambda)=\dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{A\Omega}}{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{A\Omega}\|}$ et $\vec{AB}=\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$, $\vec{A\Omega}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

donc $\cos(\lambda)=\dfrac{32}{8\cdot\sqrt{20}}=\dfrac{4}{\sqrt{20}} \Rightarrow \lambda \cong 26{,}57°$.

d) $\vec{BC}=\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ donc $(h_A): x+y=5$

A': $\begin{cases} x+y=5 \\ \underbrace{x-y=7}_{d_{BC}} \end{cases}$ donc $x=6$ et $y=-1 \Rightarrow A'(6;-1)$.

e) Déterminons $\underbrace{(h_C)}_{\text{verticale}}$: $x=4$ donc $H(4;\underbrace{1}_{\text{sur } h_A})$

f) H': $(x-6)^2+(\overbrace{5-x-1}^{4-x})^2=20 \iff$

$x^2-12x+36+16-8x+x^2=20 \iff$

$2x^2-20x+32=0 \iff \underbrace{x^2-10x+16}_{(x-8)(x-2)}=0$

$A(2;3)$ et $H'(8;-3)$

$H(4;1)$, $H'(8;-3)$, $M_{HH'}(6;-1)=A'$.

Problème 4

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{2x} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \overset{BH}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3e^{3x}}{2} = \dfrac{3}{2}$ et

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\ln(x^2 - 8)}{x - 3} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \overset{BH}{=} \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x/(x^2-8)}{1} =$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x}{x^2 - 8} = \dfrac{6}{1} = 6$.

b) On résout $x^2 + 4x + 2 = 5x + 4 \Leftrightarrow$

$\underbrace{x^2 - x - 2}_{(x-2)(x+1)} = 0$ donc les courbes se croisent en $x = -1$ et en $x = 2$

De plus $x^2 - x - 2 < 0$ entre -1 et 2 donc

$x^2 + 4x + 2 < 5x + 4$ entre -1 et 2.

$\Rightarrow A = \displaystyle\int_{-1}^{2} (5x + 4 - (x^2 + 4x + 2))\, dx =$

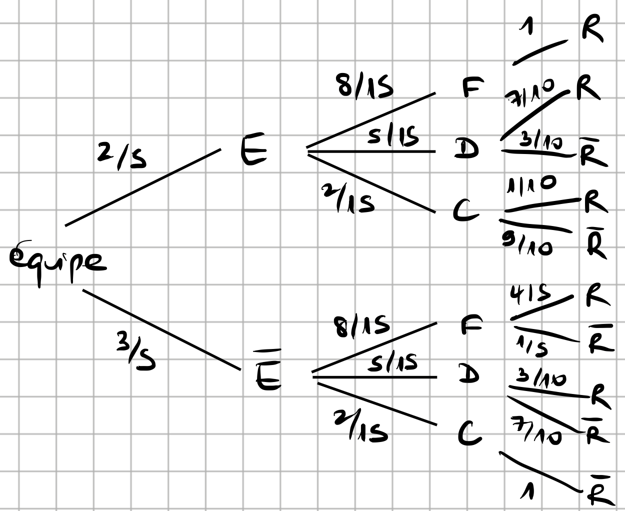
$= \displaystyle\int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\, dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_{-1}^{2} =$

$= -\dfrac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} - 2\right) = \dfrac{9}{2}$.

Problème 5

Posons E = "joueur expérimenté", F = "niveau facile", D = "niveau difficile", C = "niveau cauchemardesque" et R = "réussir".

a)



b) $p(R) = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{8}{15} + \frac{5}{15} \cdot \frac{7}{10} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{10} \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{8}{15} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{15} \cdot \frac{3}{10} \right)$

$= \frac{157}{250} = 62{,}8\ \%$.

c) $p(R \mid C) = \dfrac{p(R \cap C)}{p(C)} = \dfrac{\frac{2}{5} \cdot \cancel{\frac{2}{15}} \cdot \frac{1}{10}}{\cancel{\frac{2}{15}}} = \frac{1}{25} = 0{,}04 = 4\ \%$.

d) $p(\bar{E} \mid \bar{R}) = \dfrac{p(\bar{E} \cap \bar{R})}{p(\bar{R})} = \dfrac{\frac{3}{5}\left(\frac{8}{15} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{15} \cdot \frac{7}{10} + \frac{2}{15} \right)}{1 - 0{,}628} =$

$= \frac{71}{93} \cong 76{,}34\ \%$.

e) $B(10\,;\, 7\,;\, 0{,}628) = C^{10}_{7} \cdot 0{,}628^{7} \cdot 0{,}372^{3} \cong 23{,}80\ \%$.

f) $1 - B(10\,;\, 0\,;\, 0{,}628) = 1 - 0{,}372^{10} \cong 99{,}99\ \%$

Problème 1

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{4x^2+5x}$$

D_f : $4x^2+5x = x(4x+5) = 0 \iff x=0$ ou $x = -\frac{5}{4}$

donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5/4\,;\,0\}$

$Z_f = \emptyset$,

		$-5/4$		0	
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$

car $e^{3x} > 0$ pour tout x.

AV : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \text{"}\frac{1}{0}\text{"} = \infty$ et $\lim\limits_{x\to -5/4} \text{"}\frac{e^{-15/4}}{0}\text{"} = \infty$

donc il y a des AV en $x=0$ et $x = -\frac{5}{4}$.

AH : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \text{"}\frac{0}{\infty}\text{"} = 0$ donc il y a une AH à gauche d'équation $y=0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \overset{BH}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^{3x}}{8x+5} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \overset{BH}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{8} = \infty$$ donc pas d'AH à droite.

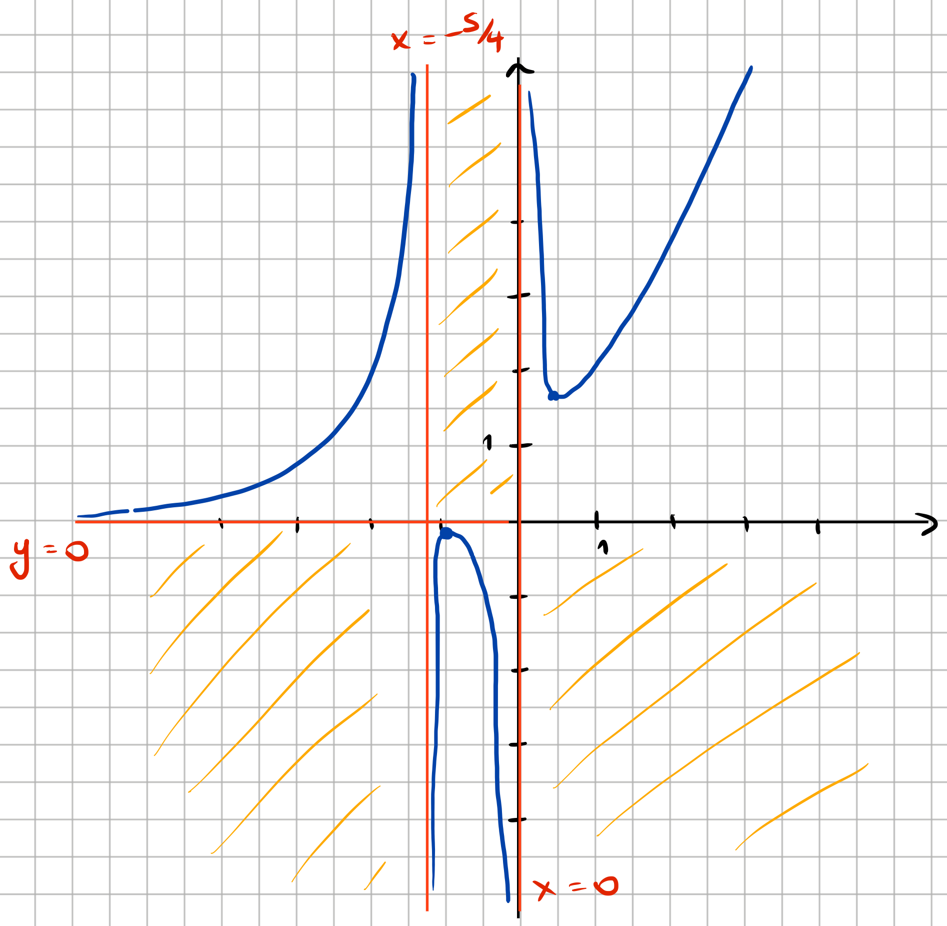
$$f'(x) = \frac{3e^{3x}(4x^2+5x) - e^{3x}(8x+5)}{(4x^2+5x)^2} =$$

$$= \frac{e^{3x}(12x^2+15x-8x-5)}{(4x^2+5x)^2} = \frac{e^{3x}(12x^2+7x-5)}{(4x^2+5x)^2}$$

zéros de f' : $\Delta = 49+240 = 289$, $x_{1,2} = \frac{-7\pm17}{24} \begin{cases} 5/12 \\ -1 \end{cases}$

		$-5/4$		-1		0		$5/12$	
e^{3x}	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$12x^2+7x-5$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$(4x^2+5x)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	min	$\nearrow$

On a un maximum en $M(-1\,;\,-0{,}05)$ et un minimum en $m(5/12\,;\,1{,}26)$.
$\approx 0{,}42$



Problème 2

a) $V = \text{base} \cdot \text{hauteur} = (24-4)\left(\frac{45}{2} - 2\right) \cdot 2 = 820$

b) $V(x) = (24-2x) \cdot \left(\frac{45}{2} - x\right) \cdot x = (540 - 45x - 24x + 2x^2)x$

$= 2x^3 - 69x^2 + 540x$

c) On calcule $V'(x) = 6x^2 - 138x + 540 =$

$= 6(\underbrace{x^2 - 23x + 90}) = 0$

$\Delta = 169, \quad x_{1,2} = \frac{23 \pm 13}{2} \to 18, \; 5$

et x doit être ≤ 12 donc $x = 18$ n'est pas admissible

Valeurs admissibles : $0 \leq x \leq 12$

$V(x)$ est maximum si $x = 5$ cm.

		x_2		10	x_1
$V'(x)$	+	0	−		
$V(x)$	↗	max	↘		

Problème 3

a) $f(x) = x + \frac{5}{x} > 0$ si $x > 0$

On a $f(x) = 6 \Leftrightarrow x^2 + 5 = 6x \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 6x + 5}_{(x-5)(x-1)} = 0$

On a $f(2) = \frac{9}{2} < 6$ donc

$$A = \int_1^5 \left(6 - x - \frac{5}{x}\right) dx = 6x - \frac{1}{2}x^2 - 5\ln(|x|) \Big|_1^5$$

$$= 30 - \frac{25}{2} - 5\ln(5) - 6 + \frac{1}{2} = 12 - 5\ln(5) \cong 3{,}95$$

b) $V = \pi \int_1^2 \underbrace{\left(x + \frac{5}{x}\right)^2}_{x^2 + 10 + \frac{5^2}{x^2}} dx = \pi \int_1^2 \left(x^2 + 10 + \frac{25}{x^2}\right) dx$

$$= \pi \left(\frac{1}{3}x^3 + 10x - \frac{25}{x}\right) \Big|_1^2 =$$

$$= \pi \left(\frac{8}{3} + 20 - \frac{25}{2} - \frac{1}{3} - 10 + 25\right) = \frac{149\pi}{6}.$$

$(\cong 78{,}02)$

c) L'équation de l'AO est $y = x$

(Avec une division euclidienne, $f(x) = \frac{x^2+5}{x}$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5 & x \\ \hline -x^2 & x \\ \hline 5 & \end{array}$$

donc $y = x$)

Problème 4

a) On a $\frac{\ln(1)}{1} = 0$ et $\frac{1}{1} - 1 = 0$ donc les deux courbes se coupent en $(1;0)$.

De plus, $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{1/x \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

qui vaut 1 si $x = 1$ et $\left(\frac{1}{x} - 1\right)' = -\frac{1}{x^2}$ qui vaut -1 si $x = 1$. Donc les deux courbes se coupent bien à angle droit en $(1;0)$.

b) $\Gamma_1 : (x-3)^2 + (y-5)^2 = \underbrace{2 + 9 + 25}_{36}$

donc $C_1(3;5)$, $r_1 = 6$

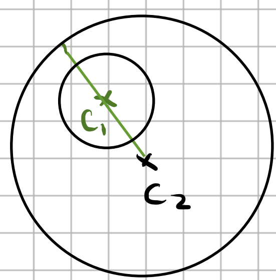
$\Gamma_2 : (x-5)^2 + (y-8)^2 = 2^2$, $C_2(5;8)$ et $r_2 = 2$.

$\overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \cong 3,6$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{C_1C_2}\| < \overbrace{r_1 - r_2}^{=4}$ donc

$\mathcal{C}_2$ est intérieur à $\mathcal{C}_1$

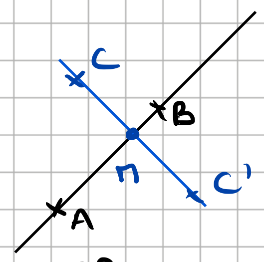
↳ ils sont donc disjoints.



Problème 5

a) $C(-4;0) \quad r = \sqrt{800} = 10\cdot\sqrt{8} = 20\cdot\sqrt{2}$

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $d_{AB} : x + 7y = 196$



$d_{CC'} : 7x - y = -28$

$M : \begin{cases} x + 7y = 196 \\ 7x - y = -28 \end{cases} \quad 50x = 0,\ x = 0,\ y = 28$

donc $M(0;28)$ et $\vec{OC'} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\underbrace{\vec{CM}}_{\begin{pmatrix} 4 \\ 28 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 56 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C'(4;56)$

c) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{CM}\| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt{4^2+28^2} = 100$

d) On a $\|\vec{CA}\| = \left\|\begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1250} \cong 40,6 > 28,3 \simeq \sqrt{800}$.

Posons $(t) : y = mx + h$, $A \in t : \ h = 25 - 21m$

et $\sqrt{800} = \delta(C;t) = \dfrac{|-4m + h|}{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow$

$\big(\underbrace{-4m + 25 - 21m}_{25^2(1-m)^2}\big)^2 = 800\,(m^2+1)$

$625\,(1 - 2m + m^2) = 800\,(m^2+1) \quad |:25$

$25\,(1 - 2m + m^2) = 32\,(m^2+1)$

$7m^2 + 50m + 7 = 0, \quad \Delta = 2304 = 48^2, \quad m_{1,2} = \dfrac{-50 \pm 48}{14} \begin{matrix} \nearrow -1/7 \\ \searrow -7 \end{matrix}$

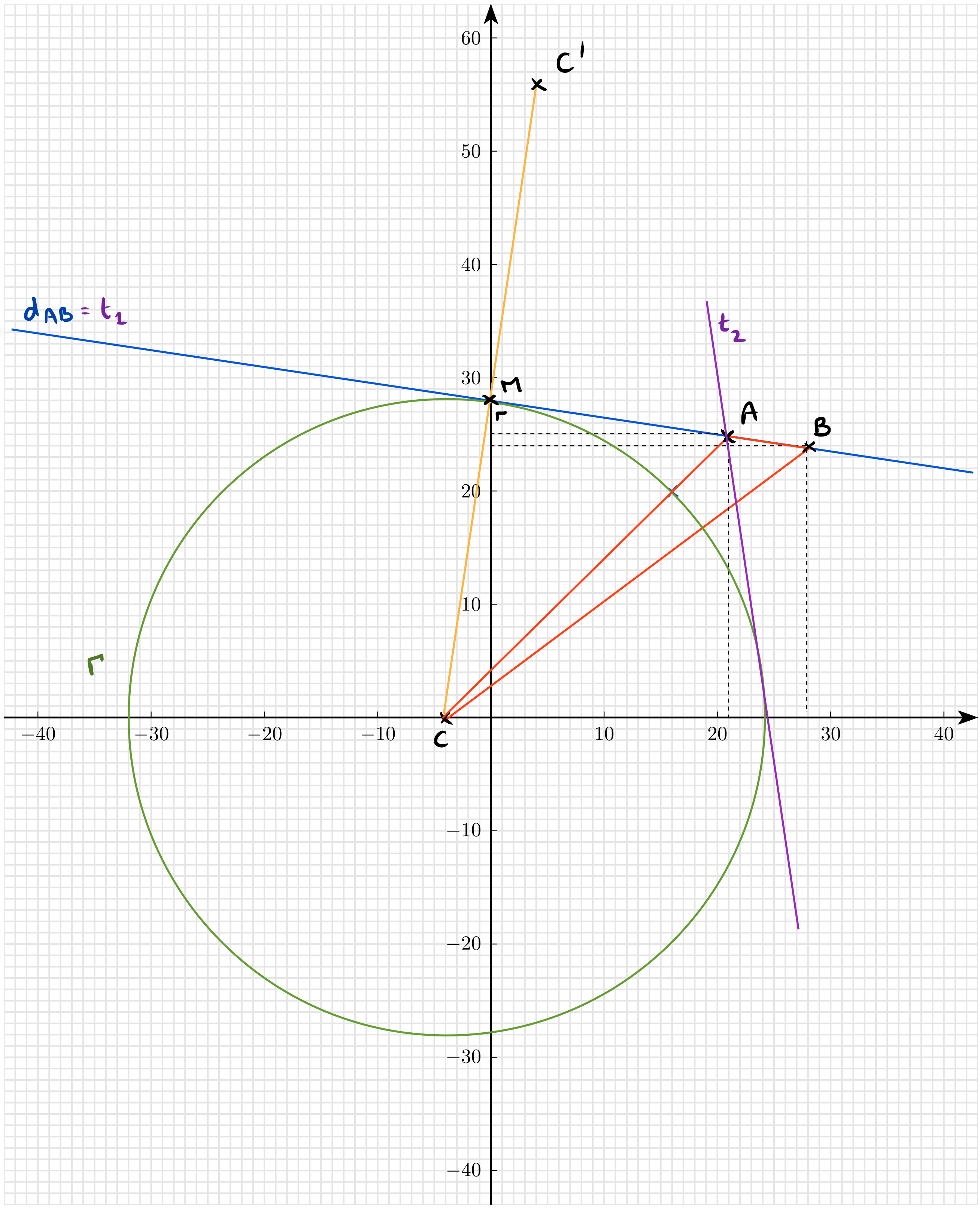
$\Rightarrow (t_1) : y = -\frac{1}{7}x + 28 \Leftrightarrow x + 7y = 196$ c'est d_{AB}.

$\Rightarrow (t_2) : y = -7x + 172$

Nom, prénom :

Annexe du problème 5

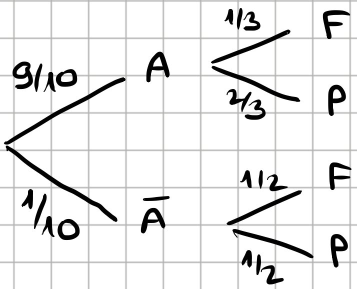
Γ passe par $(16;20)$



Probleme 6

a) $p(7P \text{ et } 2F) = C^9_2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{512}{2187} \cong 23,41\,\%$

b) A = la pièce est pipée $\qquad p(F) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{20} = 35\,\%$



$$p(\bar{A} \mid F) = \frac{p(\bar{A} \cap F)}{p(F)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{7} \cong 14,29\,\%$$

c) On a 2 cas : i) les deux pièces sont pipées

ii) l'une est pipée et l'autre équilibrée.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & p = \frac{C^9_2}{C^{10}_2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{45} \cong 35,56\,\% \\ \text{ii)} & p = \frac{C^9_1 \cdot C^1_1}{C^{10}_2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{15} \cong 6,67\,\% \end{array}\right\}$$

donc la prob. cherchée vaut $42,22\,\% = \frac{19}{45}$

Ex. 1

a) $f(x) = \dfrac{3x(x^2-2)}{x^2-3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$, $Z = \{0, \pm\sqrt{2}\}$

x		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$	
$3x$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-2	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-3	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

C'est une fonction impaire: $f(-x) = -f(x)$

AV : $\lim\limits_{x \to \pm\sqrt{3}} f(x) = \dfrac{\text{"}\pm 3\sqrt{3}\text{"}}{0} = \infty$, il y a des AV d'équation $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$.

Vu les degrés, il y a une AO :

$$\begin{array}{rl|l} & 3x^3 - 6x & x^2-3 \\ \cline{3-3} -(& 3x^3 - 9x) & 3x \\ \cline{1-2} & 3x & \end{array}$$

L'éq de l'AO est $y = 3x$ et $\delta(x) = \dfrac{3x}{x^2-3}$

Le graphe de f coupe l'AO en $P(0;0)$.

b) $f'(x) = \dfrac{(\overbrace{9x^2-6}^{3(3x^2-2)})(x^2-3) - (\overbrace{3x^3-6x}^{3x(x^2-2)}) \cdot 2x}{(x^2-3)^2} =$

$$= \frac{3(3x^4 - 11x^2 + 6) - 3(2x^4 - 4x^2)}{(x^2-3)^2} = \frac{3(\overbrace{x^4 - 7x^2 + 6}^{(x^2-6)(x^2-1)})}{(x^2-3)^2}$$

c)

x		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$\sqrt{6}$	
$3(x^2-6)$	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2-1	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x^2-3)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	min	$\nearrow$

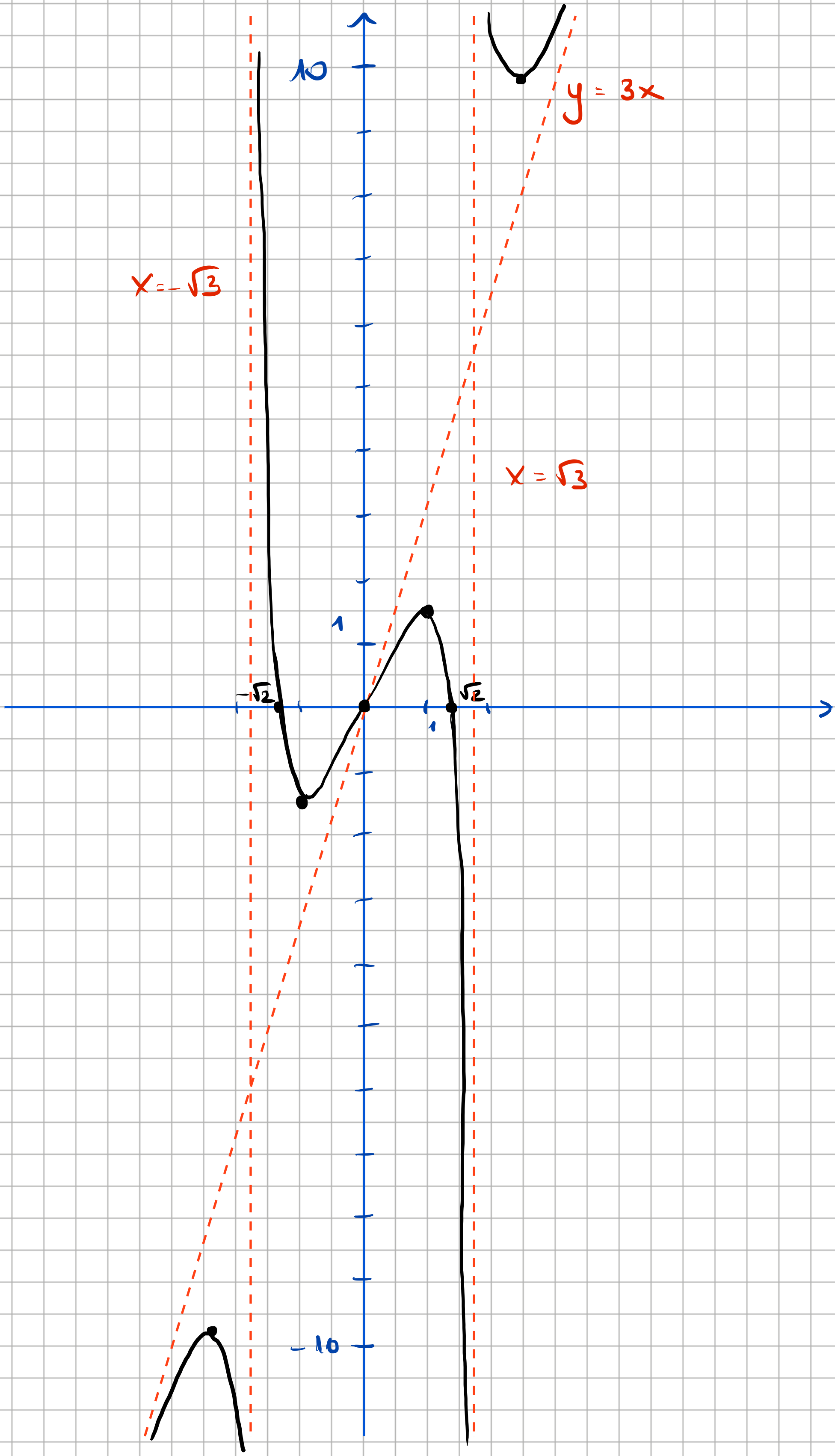
Max $(\underbrace{-\sqrt{6}}_{\cong 2,45}; \underbrace{-4\sqrt{6}}_{\cong 9,8})$

Min $(\sqrt{6}; +4\sqrt{6})$

Min $(-1; -1.5)$

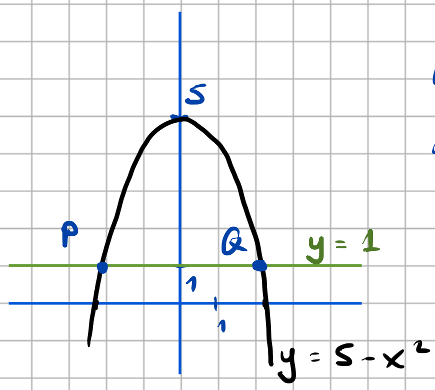
Max $(1; 1.5)$

d)



Ex. 2

b)



La courbe $y = 5 - x^2$ est une parabole concave de sommet $S(0;5)$.

Les points P et Q ont pour abscisses les x tels que $5 - x^2 = 1$ donc $x^2 = 4$ et $x = \pm 2$.

Ainsi $P(-2;1)$ et $Q(2;-1)$.

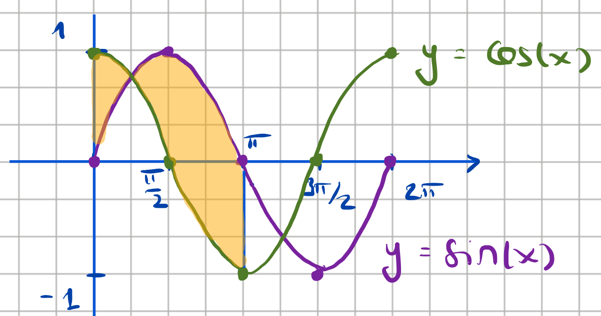
La courbe $y = 5 - x^2$ est au-dessus de $y = 1$ entre -2 et 2.

Donc $V = \pi \int_{-2}^{2} \left((5-x^2)^2 - 1 \right) dx$ $\left(\text{ou } 2\pi \int_0^2 \left((5-x^2)^2 - 1 \right) dx \right)$

$= \pi \int_{-2}^{2} \left(x^4 - 10x^2 + 24 \right) dx = \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 24x \right) \Big|_{-2}^{2}$

$= \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{80}{3} + 48 \right) \cdot 2 = \pi \cdot \frac{416}{15} \cdot 2 = \frac{832\pi}{15} \cong 174{,}25$

a)



$\sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow$

$\tan(x) = 1 \Leftrightarrow$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

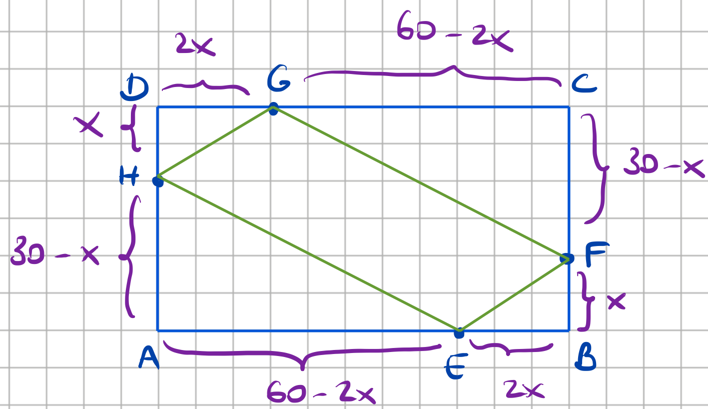
$A = \int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \sin(x))\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin(x) - \cos(x))\, dx =$

$= (\sin(x) + \cos(x)) \Big|_0^{\pi/4} + (-\cos(x) - \sin(x)) \Big|_{\pi/4}^{\pi} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 + 1 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \cong 2{,}83$

Ex. 3

L'aire du parallélogramme EFGH s'obtient en enlevant à l'aire du rectangle ABCD les aires des quatre triangles rectangles.



Donc

$$f(x) = 60 \cdot 30 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x + \\ - 2 \cdot \frac{1}{2} (60-2x)(30-x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 1800 - 2x^2 - (1800 - 120x + 2x^2) \\ = -4x^2 + 120x$$

Les valeurs admissibles pour x sont $[0 ; 30]$.

On a $f'(x) = -8x + 120$ qui s'annule en $x = 15$, qui est positive avant 15 et négative après.

L'aire est donc maximale pour $x = 15$ et vaut alors 900.

Ex. 4

a) $(\Gamma) : (x-1)^2 + (y-8)^2 = \overbrace{-7+1+64}^{58}$

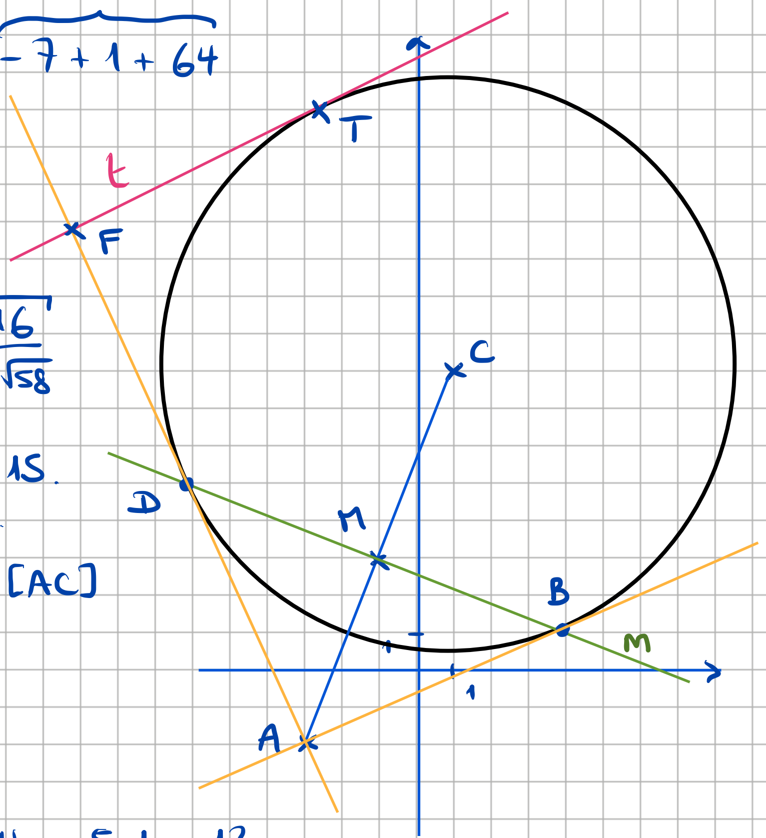
donc $C(1;8)$

et $r = \sqrt{58} \cong 7{,}6$

b) $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\|\vec{AC}\| = \underbrace{\sqrt{116}}_{>\sqrt{58}}$

donc A est extérieur à Γ.

$\delta = \|\vec{AC}\| - r = \sqrt{116} - \sqrt{58} \cong 3{,}15$.



c) Si M est le milieu de [AC]

alors $M(-1;3)$ et

$(m) : 2x + 5y = 13$.

d) $B(4;1)$ est sur m : $2 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 13$

et sur Γ : $(4-1)^2 + (1-8)^2 = 58$ et on a

$\vec{OD} = \vec{OM} + \underbrace{\vec{MD}}_{=\vec{BM}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow D(-6;5)$

[Avec le système : $x = -\frac{5}{2}y + \frac{13}{2}$, donc

$\underbrace{\left(-\frac{5}{2}y + \frac{11}{2}\right)^2}_{= \frac{1}{4}(-5y+11)^2 = \frac{1}{4}(25y^2 - 110y + 121)} + y^2 - 16y + 64 = 58 \quad | \cdot 4$

$25y^2 - 110y + 121 + 4y^2 - 64y + 24 = 0$

$29y^2 - 174y + 145 = 0 \qquad \Delta = 13456 = 116^2$

$y_{1,2} = \frac{174 \pm 116}{58}$ ↗ $5 \Rightarrow D(-6;5)$ ↘ $1 \Rightarrow B(4;1)$]

e) $\delta(C;(AD)) = \frac{|7 \cdot 1 + 3 \cdot 8 + 27|}{\sqrt{49+9}} = \frac{58}{\sqrt{58}} = \sqrt{58} = r$.

donc (AD) est tangente à Γ.

f) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $(AB) : 3x - 7y = 5$.

g) On a $(t) : 3x - 7y + c = 0$ et $\sqrt{58} = \dfrac{|3 - 7 \cdot 8 + c|}{\sqrt{58}}$

donc $|c - 53| = 58$ donc $c - 53 = \pm 58$

Avec le "$-$", on retrouve (AB) et donc

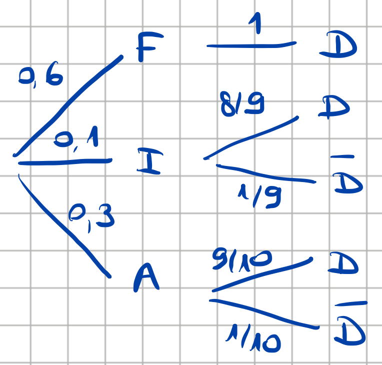
$(t) : 3x - 7y + 111 = 0$.

h) ABTF est un rectangle, en effet $(AB) \perp (AD)$ vu leurs équations. Son aire vaut $2r^2 = 2 \cdot 58 = 116$.

En effet, $AB = \delta(C ; (AD)) = r$ et $\|\vec{AF}\| = \|\vec{BT}\| = 2r$.

Ex 5

a) On note F = "un seul chiffre faux", I = "inversion de deux chiffres", A = "ajout ou oubli d'un chiffre"
Puis D = "le clef de contrôle détecte l'erreur".



b) $p(D) = 0{,}6 + 0{,}1 \cdot \frac{8}{9} + 0{,}3 \cdot \frac{9}{10} =$

$$= \frac{863}{900} \cong 95{,}89\,\%$$

c) C'est une prob. conditionnelle :

$$p(F \mid D) = \frac{p(F \cap D)}{p(D)} =$$

$$= \frac{0{,}6 \cdot 1}{863/900} = \frac{540}{863} \cong 62{,}57\,\%.$$

d) $p(D \mid \overline{A}) = \dfrac{p(D \cap \overline{A})}{p(\overline{A})} = \dfrac{0{,}6 + 0{,}1 \cdot 8/9}{0{,}6 + 0{,}1} = \dfrac{62}{63} \cong 98{,}41\,\%$

e) $p(8 \text{ CB détectés}) = C_8^{10} \left(\frac{863}{900}\right)^8 \cdot \left(\frac{37}{900}\right)^2 \cong 5{,}44\,\%$

f) $p(\overline{D} \text{ sur au moins un}) = 1 - p(10 \text{ CB détectés}) =$

$$= 1 - \left(\frac{863}{900}\right)^{10} \cong 34{,}28\,\%.$$

(22) Problème 1

$$f(x) = \left(27 \cdot \left(\frac{5}{x^4} - \frac{30}{x^6}\right)\right) = \frac{135(x^2-6)}{x^6}$$

a) zeros : $\{\pm\sqrt{6}\}$ $\qquad$ $ED_f = \mathbb{R}^*$

		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$	
$135(x^2-6)$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$
x^6	$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$

(f est une fonction paire)

AV : $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, AV : $x = 0$

AH : $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, AH : $y = 0$ (les intersections de l'AH avec le graphe sont les zeros)

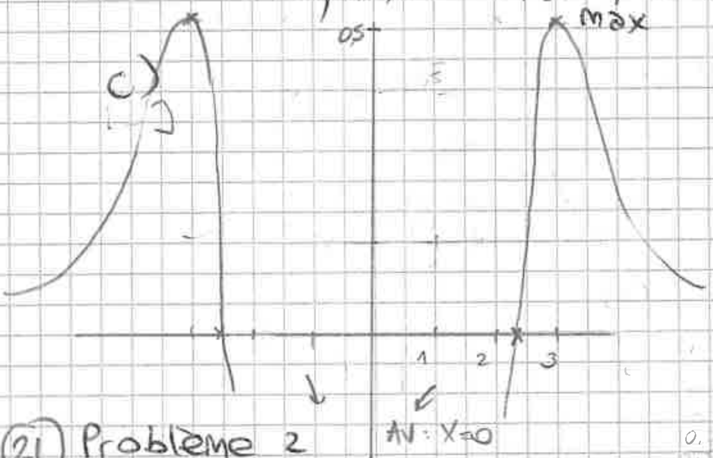
b) $$f'(x) = \frac{135 \cdot 2x \cdot x^6 - 135(x^2-6)\cdot 6x^5}{x^{12}} = \frac{540(9-x^2)}{x^7}$$

		-3		0		3	
$540(9-x^2)$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$
x^7	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	max	$\searrow$

(f' est une fonction impaire)

Max en $(-3; \frac{5}{9})$ et en $(3; \frac{5}{9})$

c) [ ]



d) [3] $P(1; -675)$

$f'(1) = 4320$

(t) : $y = 4320x - 4995$

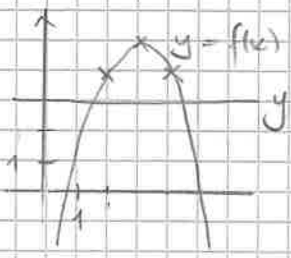
(21) Problème 2

a) Div. euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 6x^2 + x + 1 & 2x+1 \\ \hline -(6x^2+3x) & 3x-1 \\ \hline -2x+1 & \\ -(-2x-1) & \\ \hline 2 & \end{array}$$

donc $$\int \frac{6x^2+x+1}{2x+1}\,dx = \int \left(3x - 1 + \frac{2}{2x+1}\right) dx =$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - x + \ln(|2x+1|) + C.$$

b) 

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x-2) = 0$.

Vu le dessin, $A = \int_2^4 (-x^2 + 6x - 4 - 4)\,dx =$

$= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x\right)\Big|_2^4 = -\frac{64}{3} + 48 - 32 + \frac{8}{3} - 12 + 16 = \frac{4}{3}$.

c) On résout $\cos(3x+\pi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$f'(x) = -3\sin(3x+\pi)$

$\begin{cases} 3x + \pi = \frac{\pi}{3} + k_1 \cdot 2\pi \\ 3x + \pi = -\frac{\pi}{3} + k_2 \cdot 2\pi \end{cases}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = -\frac{2\pi}{9} + k_1 \cdot 2\pi/3 \\ x = -\frac{4\pi}{9} + k_2 \cdot 2\pi/3 \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-x/2}}{\ln(x+1)} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \overset{BH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}e^{-x/2}}{1/(x+1)} = \frac{1}{2}$

(17) Problème 3

a) $M_{AB}\left(-\frac{13}{2}; \frac{11}{2}\right)$, $\vec{AB} = \binom{31}{31}$, $(m_{AB}): x + y = -1$.

b) $\vec{BC} = \binom{18}{-24} = 6\binom{3}{-4} \perp \vec{v}_d = \binom{3}{4}$

et $M_{BC}(18; 9) \in n$ car $18 = 10 + 4 \cdot 2$, $9 = 3 + 3 \cdot 2$.

c) On calcule $m_{AB} \cap m_{BC}$:

$10 + 4k + 3 + 3k = -1$, donc $7k = -14$, $k = -2$.

Ainsi $C_1(2; -3)$ et $(\Gamma): (x-2)^2 + (y+3)^2 = 625$

par A

d) On résout $\underbrace{(8+4k)^2}_{16(2+k)^2} + \underbrace{(6+3k)^2}_{9(2+k)^2} = 625$

donc $25(2+k)^2 = 625 \Rightarrow (2+k)^2 = 25$

Donc $2+k = \pm 5$: $k = 3$ ou -7. $P(22;12)$ et $Q(-18;-18)$.

e) $\frac{x-y+12}{\sqrt{2}} = \pm \frac{x-7y-48}{5\sqrt{2}} \quad | \cdot 5\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow$

$5(x-y+12) = \pm(x-7y-48)$

$\oplus$ (b_1) : $4x+2y+108=0 \Leftrightarrow 2x+y+54=0$

$\ominus$ (b_2) : $6x-12y+12=0 \Leftrightarrow x-2y+2=0$

f) $P(22;12) \in b_2$ car $22-2\cdot 12+2=0$.

11 Problème 4

Volume : x^2y

Contrainte : $360(2x^2+2xy)+240xy = 54'000 \quad |:240$

$3x^2+3xy+xy = 225 \Leftrightarrow$

$3x^2+4xy = 225$

Donc $y = \frac{225-3x^2}{4x} = \frac{225}{4x} - \frac{3}{4}x$

On veut maximiser $f(x) = \frac{225}{4}\cdot x - \frac{3}{4}x^3$.

On a $f'(x) = \frac{225}{4} - \frac{9}{4}x^2$ qui s'annule en $x = \pm 5$

	0		5	
$f'(x)$	|	+	0	−
$f(x)$	|	↗	|	↘

Valeurs admissibles : $x, y \geq 0$

Le volume est donc maximal pour $x = 5$m, $y = 7{,}5$m

13 Problème 5

a) $P(3 \text{ épicéas}) = 0{,}44^3 \cong 8{,}52\,\%$

b) Il y a $100 - 44 - 18 - 15 = 23\,\%$ de telles espèces.
Donc $p = (0{,}23)^7 \cong 0{,}0034\,\% < 0{,}01\,\%$.

c) $p = 1 - (1 - 0{,}18)^5 \cong 62{,}93\,\%$

d) $C^5_2 \cdot C^3_1 \cdot C^2_2 \cdot 0{,}44^2 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}15^2 \cong 2{,}35\,\%$.

e) $p(\text{sapin} \mid \text{sapin ou épicéa}) = \dfrac{0{,}15}{0{,}15 + 0{,}44} \cong 25{,}42\,\%$.

Corrige 2019 3Ms

Solution 1. (18 points)

La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et f s'annule si $2\,x^3 = 0$, donc en $x = 0$.
Le signe de f est le suivant

x		0		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$

S'il y a une AV, c'est en $x = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\,x^3}{(x-1)^2} = \infty$, la fonction f admet la droite $x = 1$ comme asymptote verticale.

Comme le numérateur est de degré un de plus que le dénominateur, il y a une AO (que l'on peut obtenir par division euclidienne par exemple), d'équation $y = 2x + 4$.

La dérivée de f est donnée par

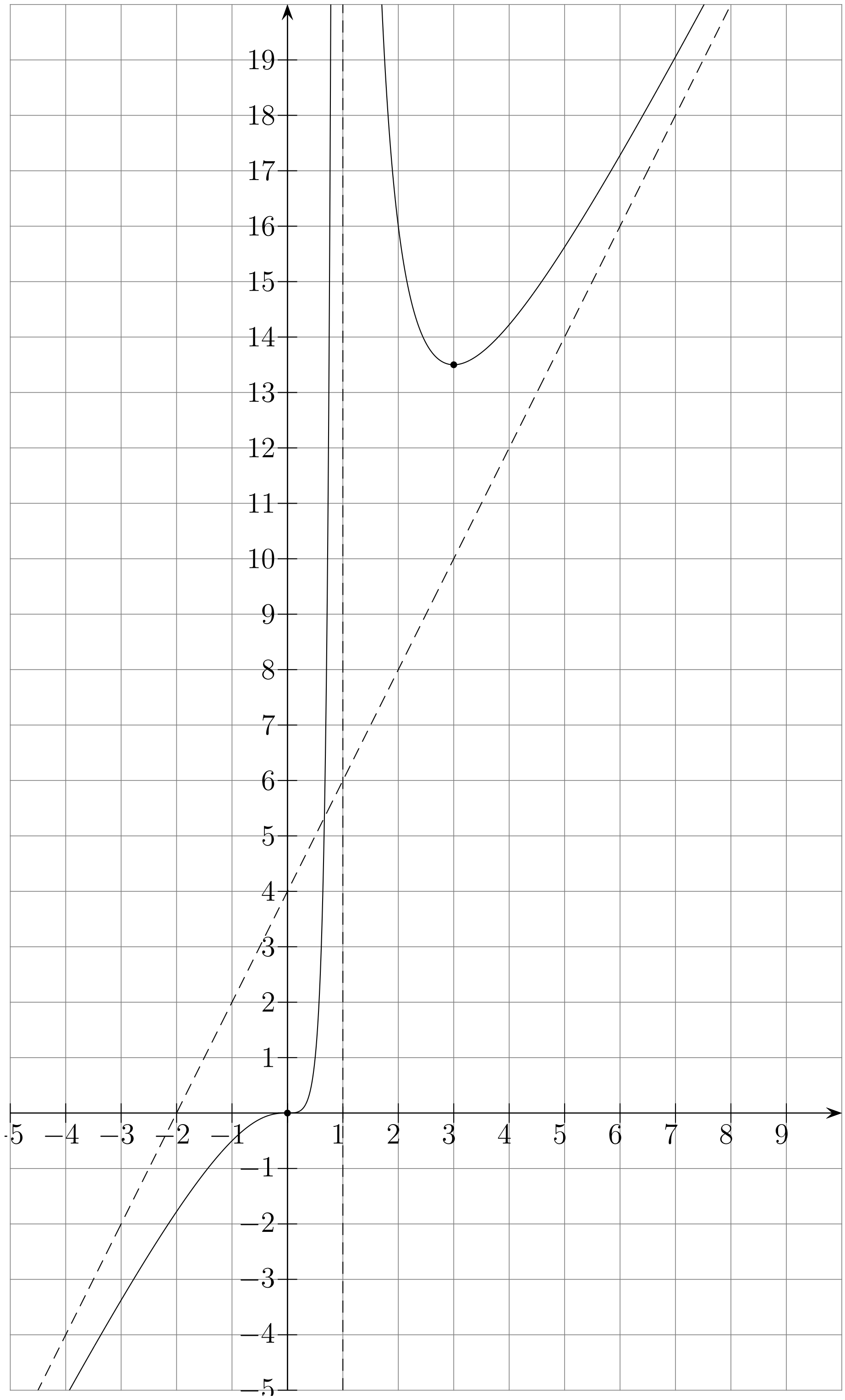
$$f'(x) = \frac{6x^2(x-1)^2 - 2x^3(2x-2)}{(x-1)^4} = \frac{6x^2(x-1) - 4x^3}{(x-1)^3} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$$

Elle s'annule si $x \in \{0; 3\}$, et f' n'est pas définie en $x = 1$. D'où le signe de f' et la croissance de f :

x		0		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

On a $f(0) = 0$ et c'est le point $\mathrm{P}(0; 0)$ est un point à tangente de pente nulle.

On a $f(3) = 13,5$, c'est le point $\mathrm{M}(3; 13,5)$ est minimum local.


19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
-5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Solution 2. (13 points)

Partie A

a) On a $f(x) = x^2(2-\sqrt{x})$, donc les zéros de f sont 0 et 4.

b) L'aire du domaine vaut

$$\int_0^4 \left(2\,x^2 - x^{2+\frac{1}{2}}\right)\,dx = \frac{2}{3}\,x^3 - \frac{2}{7}\,x^{\frac{7}{2}}\,\Big|_0^4 = \frac{128}{3} - \frac{256}{7} = \frac{128}{21} \cong 6,095$$

Partie B

a) On a $g(4) = 1$ et $h(4) = 1$, donc A$(4;1)$ est bien un point d'intersection des graphes. De même $g(7) = 2$ et $h(7) = 2$ donc B$(7;2)$ est le deuxième point.

b) Le volume du solide vaut

$$\pi\int_4^7 \left(\frac{1}{9}(x-1)^2 - \frac{4}{8-x}\right)\,dx = \pi\left(\frac{1}{27}(x-1)^3 + 4\ln(|8-x|)\right)\Big|_4^7 =$$

$$= \pi\,(8-1+0-4\ln(4)) = \pi(7-4\ln(4)) \cong 4,57$$

Solution 3. (9 points)

a) On résout $e^{2x} = e^{-x}$, donc $3x = 0$ et $x = 0$. Ainsi P$(0;1)$.

On a $f'(x) = 2e^{2x}$, $f'(0) = 2$ (donc $(t_f) : y = 2x+1$) et $g'(x) = -e^{-x}$, $g'(0) = -1$ (donc $(t_g) : y = -x+1$).

Appelons α l'angle cherché, alors $\tan(\alpha) = \left|\dfrac{2-(-1)}{1-2}\right| = |-3|$, donc $\alpha \cong 71,56°$.

b) On veut que $f'(a) = -\dfrac{1}{g'(a)}$, donc $2e^{2a} = \dfrac{-1}{-e^{-a}}$, donc $e^a = \dfrac{1}{2}$ et ainsi $a = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cong -0,69$.

Solution 4. (10 points)

La contrainte est $x + y = 5$ ou $y = 5 - x$.

Le volume du solide est donné par $\pi\cdot(2x)^2\cdot y + \dfrac{4}{2\cdot 3}\cdot\pi\cdot x^3$.

La fonction à optimiser est donc $f(x) = 4\pi x^2(5-x) + \dfrac{2\pi}{3}\,x^3$, donc $f(x) = \dfrac{\pi}{3}\,(60x^2 - 10x^3)$.

Sa dérivée vaut $f'(x) = \dfrac{10\pi}{3}\,(12x - 3x^2) = \dfrac{10\pi}{3}\,3x(4-x)$.

La croissance de f est la suivante (il faut que $x \in [0; +\infty[$).

x		0		4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Le volume est donc maximum lorsque $x = 4$ et $y = 1$.

Solution 5. (18 points)

a) On a $(\Gamma_1) : (x+4)^2 + (y-1)^2 = 90$, donc $\mathrm{C}_1(-4; 1)$ et $r_1 = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

b) Comme $\mathrm{C}_2(2; -1)$ et $r_2 = \sqrt{10}$, on a

$$||\overrightarrow{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}|| = \left|\left|\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}\right|\right| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = 3\sqrt{10} - \sqrt{10} = |r_1 - r_2|$$

donc les cercles sont tangents intérieurement.

Pour déterminer le point T d'intersection, on utilise

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}_2} + \frac{1}{2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{T}(5; -2)$. Finalement $(t) : 3x - y = 17$.

c) On pose $(t_i) : y = mx + h$.

Alors $h = -7 - 10m$ et $\sqrt{10} = \dfrac{|2m+1+h|}{\sqrt{m^2+1}}$, donc $10(m^2+1) = (-8m-6)^2$ qui est encore équivalente à

$$27m^2 + 48m + 13 = 0$$

dont les solutions $m = -\dfrac{1}{3}$ et $m = -\dfrac{13}{9}$.

Les tangentes cherchées sont donc $(t_1) : y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{11}{3}$, donc $(t_1) : x + 3y + 11 = 0$ et $(t_2) : y = -\dfrac{13}{9}x + \dfrac{67}{9}$, donc $(t_1) : 13x + 9y = 67$.

d) Appelons C_3 le centre du cercle cherché. On a

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}_3} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{\sqrt{10}}{||\overrightarrow{\mathrm{C}_2\mathrm{P}}||}\,\overrightarrow{\mathrm{C}_2\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

donc $(\Gamma_3) : (x+4)^2 + (y+3)^2 = 10$.

Solution 6. (15 points)

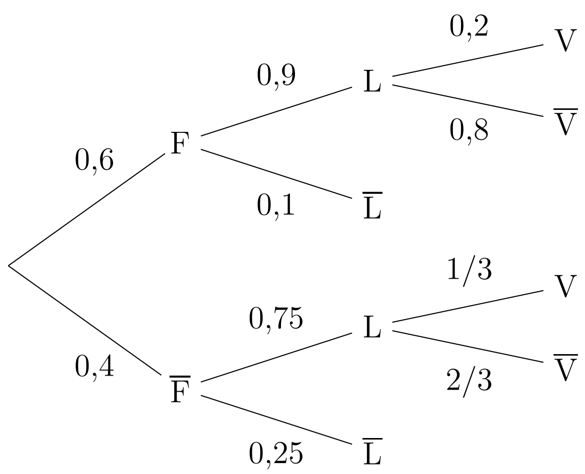
Partie A

a) On a $C_3^{10} = 120$.

b) C'est une permutation avec répétition : $\dfrac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$.

Partie B

On note F l'événement "la saison a été favorable", L : "les légumes ont bien poussés" et V : "le voisin est venu chaparder".



c) $P\left(\overline{L}\right) = 0.6 \cdot 0.1 + 0,4 \cdot 0,25 = 16\%$.

d) $P(V) = 0,6 \cdot 0,9 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,75 \cdot \frac{1}{3} = 20,8\%$.

e) $P(\ \overline{F} \mid \overline{L}\ ) = \dfrac{P(\overline{F} \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \dfrac{0,4 \cdot 0,25}{0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,25} = 62,5\%$.

f) $P(L) = 1 - 0,16 = \dfrac{21}{25}$ donc $p = C_9^{10} \left(\dfrac{21}{25}\right)^9 \cdot \left(\dfrac{4}{25}\right) + \left(\dfrac{21}{25}\right)^{10} \cong 50,8\%$.