Problème 1 (27 points)

Soit la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{2\,x^2 - 12\,x + 18}{x^2 + 2\,x - 3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition, le(s) zéro(s) et le signe de f.

b) Trouver les équations des asymptotes de f et déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection du graphe de f avec ses asymptotes.

c) Montrer que $f'(x) = \dfrac{16\,(x^2 - 3\,x)}{(x^2 + 2\,x - 3)^2}$, puis étudier la croissance de f et préciser les coordonnées des points qui correspondent à ses extremums.

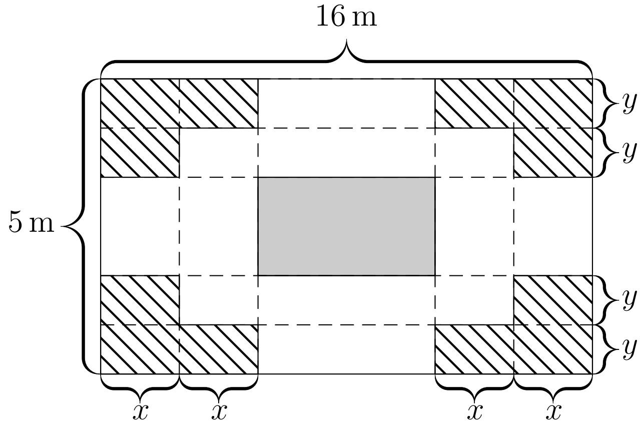
d) Esquisser soigneusement le graphe de f **sur la feuille annexe** (page 4).

e) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $a = -1$.

Problème 2 (10 points)

Un jardinier souhaite aménager un jardin à la française composé de roses blanches et de roses rouges, selon le plan ci-contre, où les roses rouges occupent la partie centrale en gris, et les roses blanches les parties hachurées dans les coins.

Il souhaite que la surface occupée par les roses blanches soit de $15\,\mathrm{m}^2$. Pour quelles valeurs de x et y la surface de jardin occupée par toutes les roses est-elle maximale ?



Problème 3 (13 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

a) Calculer les deux limites suivantes.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3\,x} - 1}{2\,x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x - 3}$$

b) Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes $y = x^2 + 4\,x + 2$ et $y = 5\,x + 4$ (il n'est pas demandé de représenter le domaine).

Problème 4 (19 points)

Dans un repère orthonormé, on donne les points $\mathrm{A}(-6\,;-4\,;0)$ et $\mathrm{B}(0\,;-1\,;3)$ ainsi que la sphère Σ d'équation $x^2 + 4\,x + y^2 + 4\,y + z^2 + 2\,z = 0$.

a) Donner les équations paramétriques de la droite d passant par les points A et B.

b) Donner le centre C et le rayon r de la sphère Σ.

c) Déterminer les points d'intersection T_1 et T_2 de la droite d avec la sphère Σ.

d) Déterminer les équations des plans tangents à la sphère Σ en ces points.

e) Donner les équations paramétriques de la droite d'intersection de ces deux plans.

f) Montrer que le plan π d'équation $2\,x + y - 5\,z + 16 = 0$ coupe la sphère Σ. Donner le centre C' et le rayon r' du cercle formé par l'intersection du plan π avec la sphère Σ.

Problème 5 (18 points)
Dans le jeu Candy Crush, on distingue trois types de niveaux :

— les niveaux faciles ;

— les niveaux difficiles ;

— les niveaux cauchemardesques.

Un joueur expérimenté réussit toujours un niveau facile, 7 fois sur 10 un niveau difficile et 1 fois sur 10 un niveau cauchemardesque.
Un joueur novice, par contre, réussit 4 fois sur 5 un niveau facile, 3 fois sur 10 un niveau difficile et ne réussit jamais un niveau cauchemardesque !

Un championnat est organisé. Des niveaux sont proposés aléatoirement à une équipe de 5 joueurs parmi lesquels figurent 2 joueurs expérimentés et 3 joueurs novices.
Il y a 8 niveaux faciles, 5 niveaux difficiles et 2 niveaux cauchemardesques.

Un joueur est d'abord tiré au sort et joue pour toute l'équipe, puis l'un des 15 niveaux est choisi au hasard.

a) Représenter la situation par un arbre.

b) Vérifier que la probabilité que l'équipe réussisse un niveau vaut 62,8 %.

c) Quelle est la probabilité que l'équipe ait réussi si l'on sait que le niveau tiré au sort était cauchemardesque ?

d) L'équipe n'a pas réussi le niveau. Quelle est la probabilité que ce soit un joueur novice qui ait été tiré au sort ?

Le but de la compétition est de réussir un maximum de niveaux en 10 tentatives. Les conditions initiales s'appliquent à chaque fois : il y a toujours 15 niveaux qui peuvent être sélectionnés, et un joueur qui a déjà été sélectionné peut être à nouveau tiré au sort pour jouer le niveau suivant.

e) Calculer la probabilité qu'une équipe réussisse exactement 7 niveaux.

f) Calculer la probabilité qu'une équipe réussisse au moins un niveau.

Problème 6 (16 points)
Les questions a) et b) sont indépendantes l'une de l'autre.

a) On donne l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & k-1 & 3 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

i) Pour quelles valeurs de k l'application f est-elle bijective ?

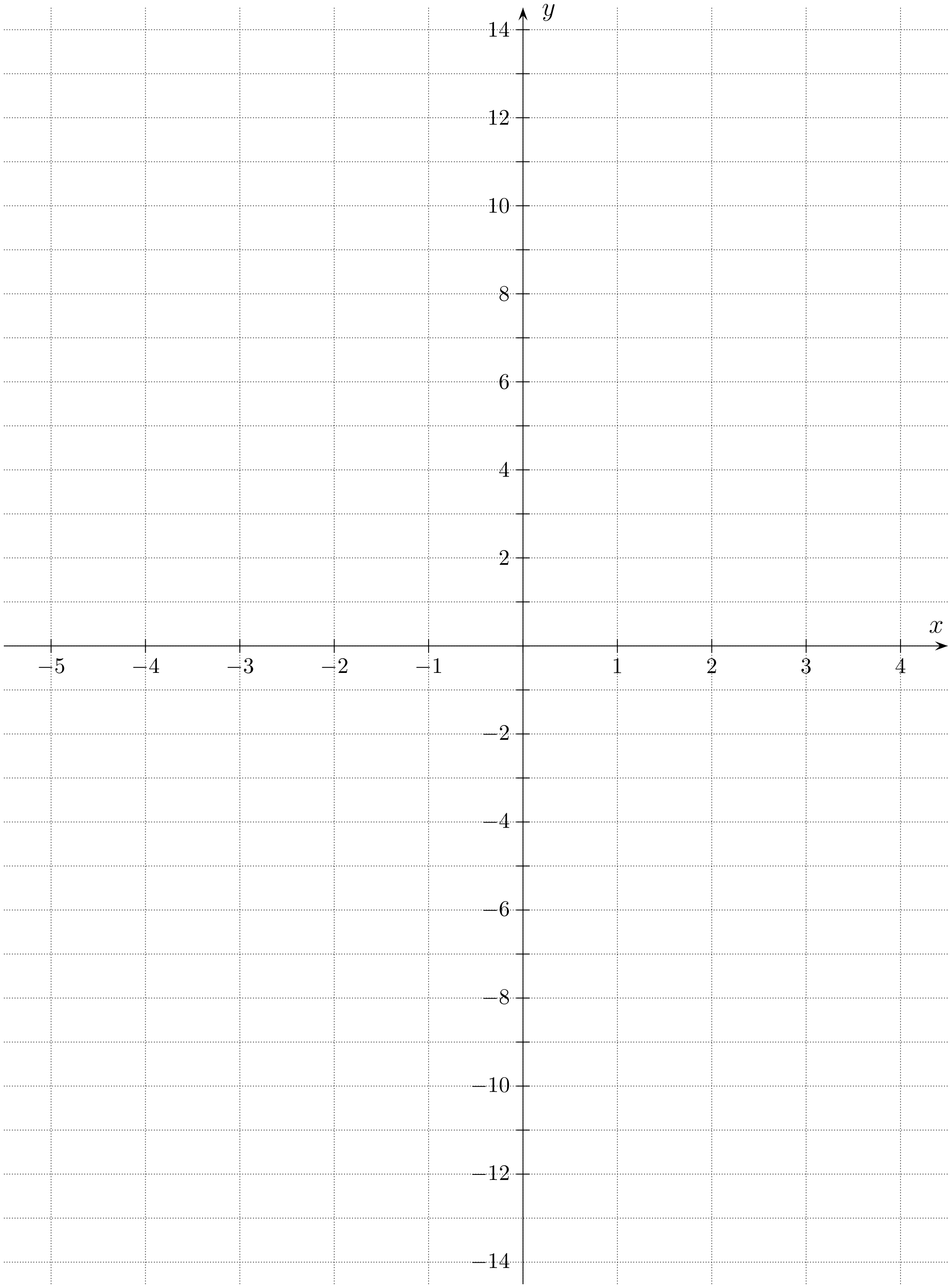
ii) On pose $k = 1$. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie orthogonale relativement à la droite d'équation $3\,x - y = 0$. Quelle est la matrice associée à f relativement à la base canonique ?

Indication : donner deux vecteurs dont les images sont évidentes.

Nom, prénom : ______________________

Annexe du problème 1



Problème 1 (22 points)

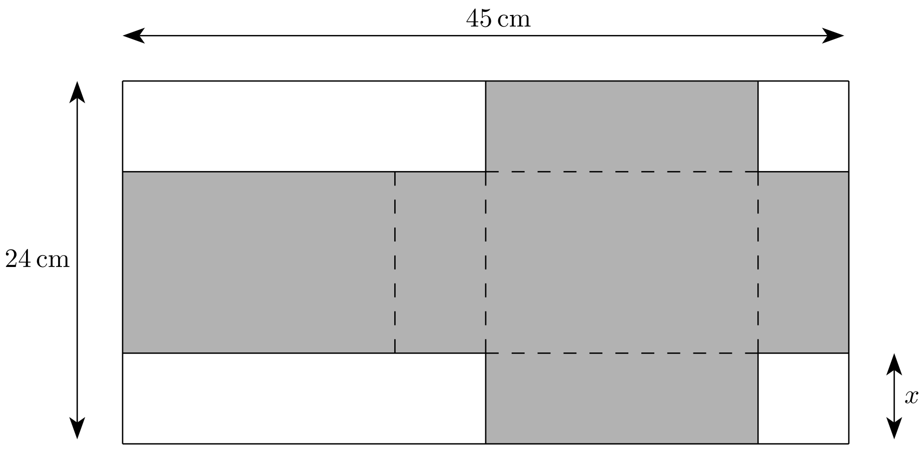
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{4x^2+5x}$.

On demande : l'ensemble de définition, le signe de f, les équations des éventuelles asymptotes verticales et horizontales, la croissance de f, les coordonnées des extremums de f et le graphe de f **sur la feuille annexe** (page 4).

Problème 2 (9 points)

Un artisan fabrique des boîtes en forme de parallélépipède rectangle à partir de feuilles cartonnées longues de 45 cm et larges de 24 cm. Il y découpe le chablon suivant.

Attention, ce croquis ne respecte pas les proportions !



a) Montrer que si x vaut 2 cm, le volume de la boîte fabriquée est de 820 cm^3.

b) Donner $\mathrm{V}(x)$, l'expression du volume de la boîte en fonction de x.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de x le volume est-il maximal ? Justifier.

Problème 3 (12 points)

On considère la fonction $f : \ ]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x + \dfrac{5}{x}$.

a) Calculer l'aire de la surface délimitée par le graphe de f et la droite d'équation $y = 6$.

b) Calculer le volume de révolution autour de Ox du domaine délimité par le graphe de f et les droites $x = 1$ et $x = 2$.

c) Donner l'équation de l'asymptote oblique de f.

Problème 4 (11 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

a) Considérons les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x} - 1$.

Montrer que leurs graphes se coupent à angle droit en leur point d'abscisse 1.

b) Les cercles d'équations

$$\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 6\,x - 10\,y = 2 \quad \text{et} \quad \Gamma_2 : (x-5)^2 + (y-8)^2 = 4$$

sont-ils confondus, sécants, tangents (intérieurement ou extérieurement) ou disjoints ? Justifier.

Problème 5 (15 points)
On donne les plans $\alpha : 2\,x + 2\,y + z - 39 = 0$ et $\beta : -x + 2\,y + 2\,z - 28 = 0$, ainsi que les points $\mathrm{A}(4\,;-3\,;-11)$ et $\mathrm{B}(1\,;18\,;16)$.

a) Calculer l'angle aigu entre les plans α et β.

b) Donner une équation cartésienne du plan perpendiculaire aux plans α et β passant par le point A.

c) i) Déterminer des équations cartésiennes des plans bissecteurs des plans α et β.
   ii) Donner une équation cartésienne de l'une des deux sphères tangentes aux plans α et β, dont le centre se situe sur la droite passant par les points A et B.

Problème 6 (14 points)
Neuf pièces de monnaie sont pipées de sorte que la probabilité d'obtenir pile vaut deux tiers.

a) On lance les neuf pièces. Calculer la probabilité d'obtenir sept fois pile et deux fois face.

On ajoute une dixième pièce équilibrée aux neuf pièces pipées.

b) On choisit une pièce au hasard et on la lance.
   i) Calculer la probabilité d'obtenir face.
   ii) Calculer la probabilité qu'il s'agisse de la pièce équilibrée, sachant qu'on a obtenu face.

c) On lance deux pièces prises au hasard parmi les dix. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois pile.

Problème 7 (20 points)
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par sa matrice (relativement à la base canonique) ci-dessous

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Donner une base du noyau de f et une base de l'image de f.

b) Donner une matrice P et une matrice diagonale D telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$.

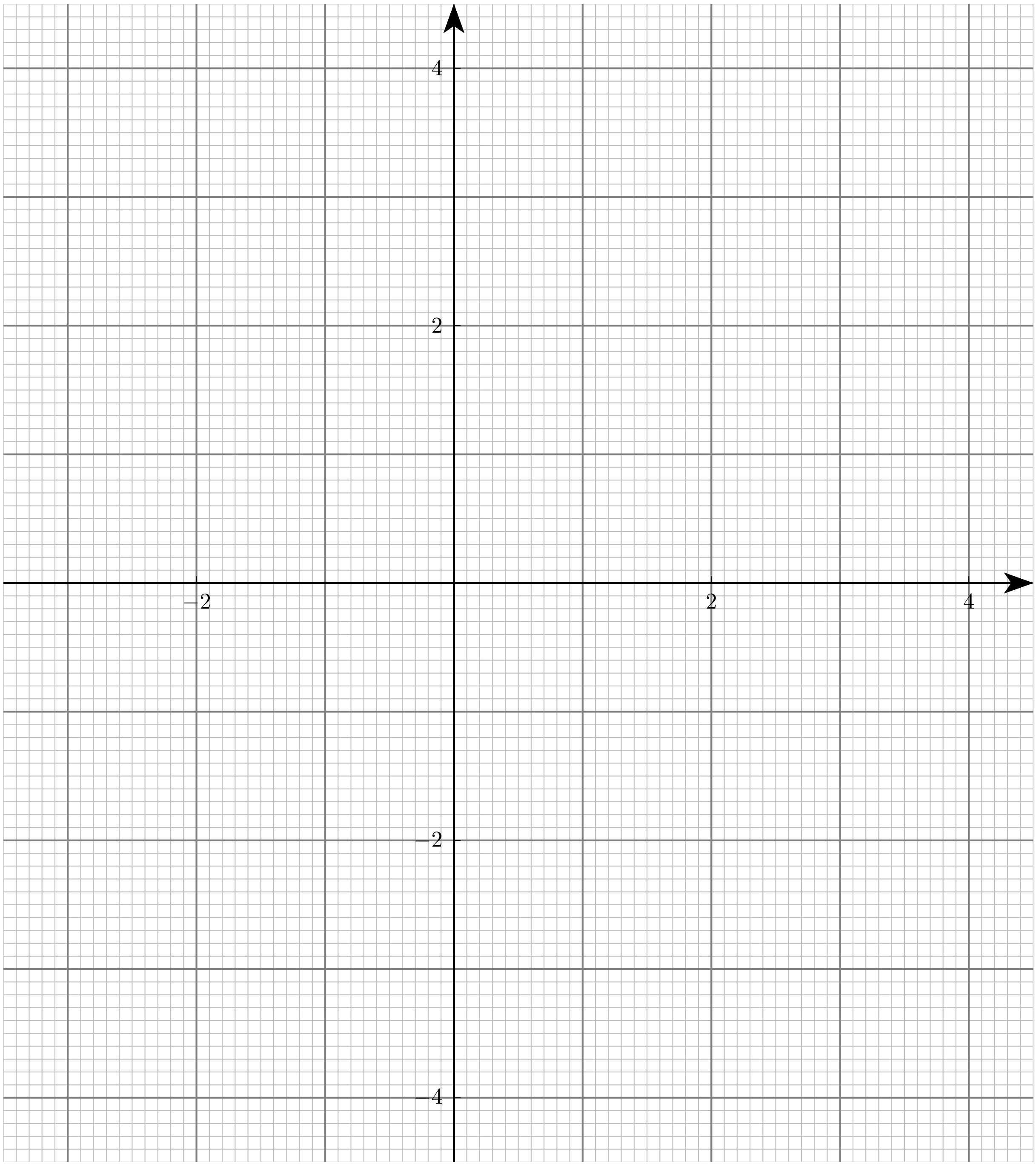
c) Quelle est la nature géométrique de f ?

d) Calculer A^2.

e) Donner les valeurs propres et les espaces propres de A^n, pour $n \geqslant 1$.

Nom, prénom : ______________________

Annexe du problème 1



Problème 1 (23 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3\,x^3 - 6\,x}{x^2 - 3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f, son signe et les équations de ses asymptotes.

b) Vérifier que la dérivée de f est donnée par l'expression $f'(x) = \dfrac{3\,(x^2-6)\,(x^2-1)}{(x^2-3)^2}$.

c) Déterminer la croissance de f et les coordonnées des extrema de f.

d) Sur une nouvelle page, esquisser le graphe de f à l'échelle 1 unité = 2 carrés = 1 cm.

Problème 2 (14 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

a) Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(x).$$

Esquisser leur graphe sur l'intervalle $[0; 2\,\pi]$. Déterminer l'aire de la région limitée par les courbes $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ et $x = \pi$ (on demande la valeur exacte).

b) Déterminer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la région limitée par les courbes

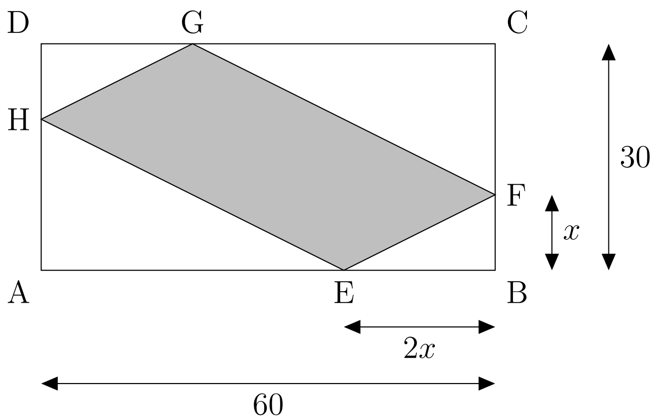
$$y = 5 - x^2 \quad \text{et} \quad y = 1$$

autour de l'axe des x (on demande la valeur exacte).

Problème 3 (8 points)

Le parallélogramme EFGH est inscrit dans un rectangle ABCD de dimensions $30\,\text{cm} \times 60\,\text{cm}$ de sorte que BE = 2BF. On pose x = BF et $2x$ = BE.

Quelle est l'aire maximale de ce parallélogramme ? Que vaut alors x ? Justifier.



Problème 4 (14 points)
Relativement à un repère orthonormé de l'espace, on considère :

- Les points $A(-3;1;3)$, $B(0;3;1)$ et $C(1;1;-1)$;
- La droite d d'équation paramétrique :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan passant par les points A, B et C.

b) Montrer que le point $A'(-1;-1;7)$ est le symétrique de A par rapport à d. Donner l'équation cartésienne de la sphère Σ_1 de centre A' et de rayon 4.

c) On considère les plans d'équation

$$x + 2y - 2z - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad 2x - y + 2z + 1 = 0$$

Déterminer l'équation de la sphère Σ_2 tangente simultanément aux plans ci-dessus et dont le centre appartient à la droite d.

d) Quelle est la position relative de Σ_1 par rapport à Σ_2 ?

Problème 5 (17 points)
La plupart des articles commercialisés sont identifiés par un code à 13 chiffres traduit sous forme de code-barres pour la saisie informatique.

Le dernier chiffre est une clef de contrôle qui permet de détecter les éventuelles erreurs de saisie par des humains ou par des capteurs électroniques.

D'après les données statistiques, les erreurs de saisie se répartissent **exclusivement** selon les types ci-dessous :

- un seul chiffre faux : 60%,
- inversion de deux chiffres : 10%,
- ajout ou oubli d'un chiffre : 30%.

La clef de contrôle détecte toute erreur portant sur un seul chiffre. L'inversion de deux chiffres est détectée 8 fois sur 9, un mauvais nombre de chiffres 9 fois sur 10.

Pour la suite, nous nous intéressons uniquement aux cas où une erreur s'est produite.

a) Représenter la situation par un arbre.

b) Vérifier que la probabilité qu'une erreur soit détectée vaut $95{,}\overline{8}\%$.

c) La clef de contrôle a détecté une erreur, quelle est la probabilité qu'un seul des chiffres saisis soit faux ?

d) Sachant que le code saisi a le bon nombre de chiffres, quelle est la probabilité que la clef de contrôle détecte une erreur ?

On vérifie dix codes à l'aide de la clef de contrôle.

e) Calculer la probabilité que la clef de contrôle détecte exactement huit codes présentant une erreur.

f) Calculer la probabilité que la clef de contrôle ne détecte pas d'erreur sur au moins l'un des dix codes.

Problème 6 (15 points)
On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par sa matrice A (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$) ci-dessous :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de A et montrer que les valeurs propres sont 0 et -1.
b) Donner une base des espaces propres E_0 et E_{-1} (associés respectivement aux valeurs propres 0 et -1).
c) Déterminer une matrice P telle que la matrice $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit diagonale. Donner alors la matrice A'.
d) Donner les valeurs propres de la matrice A^2 et interpréter géométriquement l'application $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.

Problème 1 (22 points)
Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{135(x^2-6)}{x^6}$$

a) Donner le domaine de définition de la fonction f, son signe et les équations des éventuelles asymptotes.
b) Étudier la croissance de la fonction f en précisant les coordonnées des extremums.
c) Esquisser le graphe de la fonction f (échelle conseillée pour l'axe horizontal : 1 unité correspond à 2 carrés, et pour l'axe vertical : 1 unité correspond à 20 carrés).
d) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction f au point $(1; f(1))$.

Problème 2 (21 points)
Les questions suivantes sont indépendantes.

a) Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{6\,x^2+x+1}{2\,x+1}$.
b) Déterminer l'aire de la région limitée par les courbes

$$y = f(x) \qquad \text{et} \qquad y = g(x)$$

où

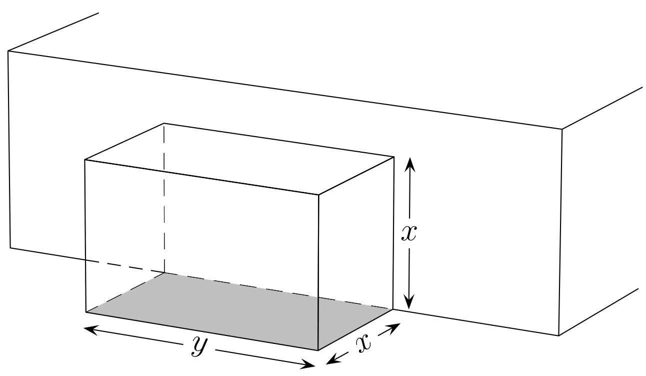
$$f(x) = -x^2 + 6\,x - 4 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 4\,.$$

c) Soit $f(x) = \cos(3x+\pi) - \frac{1}{2}$. Déterminer les zéros de la fonction f, puis sa dérivée.
d) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{\ln(x+1)}$.

Problème 3 (11 points)
Un restaurant souhaite, pour un budget de 54 000 fr., réaliser une véranda afin d'augmenter sa capacité d'accueil.
Cette extension, en forme de parallélépipède rectangle, se compose de

— quatre parties en panneaux de verre : un toit, une façade et deux faces latérales carrées,
— un sol en bois.

Sachant que les panneaux de verre coûtent 360 fr./m^2 et que le bois coûte 240 fr./m^2, déterminer les dimensions de la véranda permettant d'obtenir un volume maximal.



Problème 4 (16 points)
On donne la sphère Σ_1 d'équation

$$(\Sigma_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 31$$

ainsi que les points $A(-4; 1; 2)$, $B(0; 3; 6)$ et $C(1; 5; 4)$.

a) Déterminer le centre P et le rayon r de Σ_1.

b) Déterminer l'équation du plan α contenant les points A, B et C ; puis montrer que la sphère Σ_1 est tangente au plan α.

c) Déterminer l'équation d'une sphère Σ_2, de même rayon que Σ_1, qui passe par P et dont le centre appartient au plan α.

d) Soit d la droite perpendiculaire au plan α et passant par P. Déterminer les équations de deux sphères dont le centre appartient à la droite d et qui sont simultanément tangentes à Σ_1 et à Σ_2.

Problème 5 (13 points)
Dans les forêts de Suisse on compte une soixantaine d'essences d'arbres dont en moyenne 44 % d'épicéas, 18 % de hêtres et 15 % de sapins. Les autres essences sont toutes nettement moins répandues.

a) Sylvain se balade en forêt, il passe devant trois arbres à la suite. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de trois épicéas ?

b) Au cours de sa promenade, Sylvain grave chacune des sept lettres de son prénom sur le tronc de sept arbres choisis au hasard (une lettre par tronc). Vérifier que la probabilité que les lettres de son prénom soient toutes écrites sur des arbres appartenant uniquement aux essences les moins répandues des forêts suisses est inférieure à 0,01 %.

c) Sylvain décide ensuite de ramasser un morceau d'écorce de cinq arbres au hasard. Quelle est la probabilité qu'il récolte au moins une écorce de hêtre ?

d) Puis Sylvain coupe une branche sur cinq arbres au hasard. Quelle est la probabilité que son bouquet de cinq rameaux soit composé de deux branches d'épicéa, une branche de hêtre et deux de sapins ?

e) Sylvain désire ramener chez lui un sapin pour Noël directement de la forêt, mais il est incapable de différencier les sapins des épicéas. Il ramène donc chez lui un arbre de Noël qui peut être l'un ou l'autre. Quelle est la probabilité que Sylvain rapporte un véritable sapin à la maison ?

Problème 6 (12 points)
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une base du noyau de A.

b) Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice A. Déterminer une base de l'espace propre correspondant.

c) Déterminer si la matrice A est diagonalisable. Si c'est le cas, donner la matrice diagonale correspondante. Sinon, le justifier.

Problème 1 (17 points)

Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2\,x^3}{x^2 - 2\,x + 1}$.

On demande : le signe de f, les équations des asymptotes, la croissance de f, les coordonnées des extremums de f et le graphe de f.

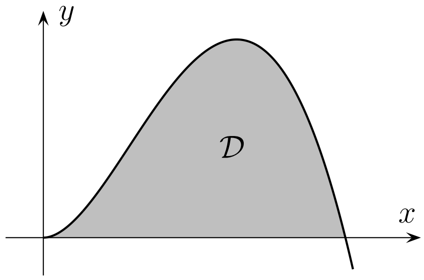
Problème 2 (13 points)
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 2\,x^2 - x^2\,\sqrt{x}.$$

a) Donner les zéros de la fonction f.

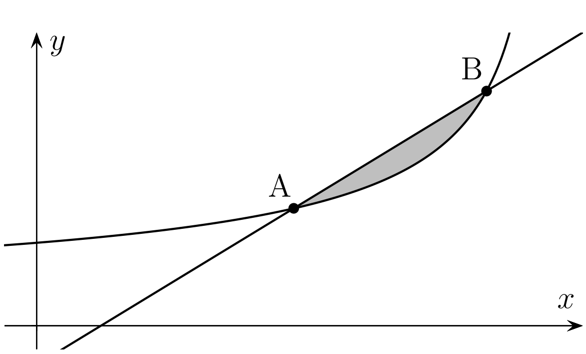
b) Déterminer l'aire du domaine borné $\mathcal{D}$ délimité par le graphe de la fonction f et l'axe horizontal.



Partie B
On considère les fonctions g et h définies par $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{8-x}}$ et $h(x) = \dfrac{1}{3}\,(x-1)$.

c) Soient $\mathrm{A}(a_1; a_2)$ et $\mathrm{B}(b_1; b_2)$ les points d'intersection des graphes de ces deux fonctions.
   - Vérifier que $a_1 = 4$ et que $b_1 = 7$.
   - Calculer a_2 et b_2.

d) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe horizontal du domaine borné délimité par le graphe de ces deux fonctions.



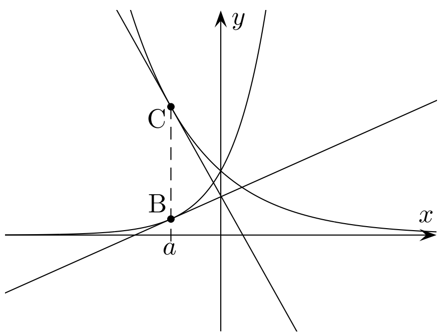
Problème 3 (9 points)
Considérons les fonctions f et g définies par $f(x) = e^{2\,x}$ et $g(x) = e^{-x}$.

a) Soit P le point d'intersection des graphes des fonctions f et g. Déterminer les pentes des tangentes aux graphes de f et de g en P. En déduire l'angle aigu formé par ces tangentes.

b) Ci-contre les graphes des fonctions f et g.

   Quelles sont les coordonnées des points B et C, alignés verticalement, sachant que les tangentes en ces points aux graphes de f et de g sont perpendiculaires ?

   Indication : deux droites, de pente m_1 et m_2, sont perpendiculaires si et seulement si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

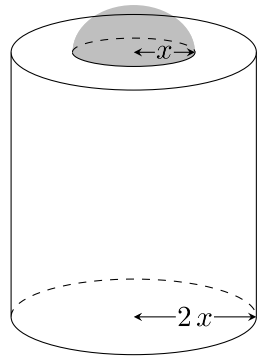


Problème 4 (10 points)

Le solide S est formé d'un cylindre de rayon $2\,x$ et de hauteur y sur lequel est posé une demi-sphère de rayon x.

La somme de la hauteur du cylindre et du rayon de la demi-sphère est égale à 5.

Déterminer x et y de sorte que le volume du solide S soit maximal.



Problème 5 (13 points)
On donne les points A$(15; 2; -1)$, B$(5; 2; 4)$, C$(14; 0; 0)$ et P$(10; -2; 13)$.

a) Donner une équation cartésienne de α, le plan passant par les points A, B et C.

b) Donner une équation de d, la droite perpendiculaire au plan α et passant par P.

c) Déterminer l'intersection de la droite d et du plan α.

d) Donner l'équation de la sphère Σ_1, centrée en P et tangente au plan α.

e) Déterminer l'équation de la sphère Σ_2 passant par P et tangente à la fois à Σ_1 et au plan α.

Problème 6 (15 points)
Bertrand doit choisir quelles variétés de graines semer dans son potager. Au magasin, il y a dix variétés de graines.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

a) Bertrand décide d'acheter trois variétés de graines. Combien a-t-il de choix ?

b) Dans les six emplacements de son potager, Bertrand veut semer des carottes dans trois emplacements, des courges dans deux emplacements et des radis dans un emplacement. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

Partie B

On sait que 60 % des saisons sont favorables aux cultures. De plus, si la saison est favorable, les légumes ont 90 % de chance de bien pousser, contre 75 % de chance dans le cas contraire. Enfin, si les légumes ont bien poussé, le voisin de Bertrand vient chaparder ses légumes, une fois sur cinq si la saison a été favorable, une fois sur trois si la saison a été défavorable.

c) Vérifier que la probabilité que les légumes aient mal poussé est de 16 %.

d) Quelle est la probabilité que le voisin de Bertrand vienne chaparder ses légumes ?

e) Sachant que les légumes ont mal poussé, quelle est la probabilité que la saison ait été défavorable ?

f) Bertrand s'est occupé d'un potager pendant dix saisons. Quelle est la probabilité que ses légumes aient bien poussé au moins neuf fois ?

Problème 7 (18 points)
Une application linéaire $\alpha_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est donnée, relativement à la base canonique, par la matrice

$$\mathrm{A}_k = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 6 & k & -2 \\ -18 & 6 & k+8 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles α_k n'est pas inversible.

On pose $k = 0$ et on note $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0$.

b) Déterminer une base du noyau de A et une base de l'image de A.

c) Déterminer une matrice P de façon à ce que la matrice $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit diagonale. Donner également la matrice D.

d) Déterminer les valeurs propres et une base de chaque espace propre de la matrice A^4 (sans calculer cette matrice).