Problème 1 (12 points)
Le prix d'entrée au théâtre est de 18 fr. pour les adultes et de 7,50 fr. pour les enfants.
Si le total des entrées s'élève à 900 fr., combien de personnes ont assisté à la représentation, sachant qu'il y avait davantage d'adultes que d'enfants ? Donner toutes les solutions.

Problème 2 (11 points)
Trouver un entier compris entre 9000 et 10 000 qui donne un reste de 9 lorsqu'on le divise par 10 ou 11 et qui est divisible par 13.

Problème 3 (15 points)
Alice a pour clé publique $n_\mathrm{A} = 493$, $e_\mathrm{A} = 5$. Elle veut envoyer le message $m = 33$ à Bob dont la clé publique est $n_\mathrm{B} = 247$, $e_\mathrm{B} = 11$. Quel message codé et quelle signature codée lui adresse-t-elle ?

Problème 4 (11 points)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de manière récursive par

$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{5\,u_n + 14} \quad, n \geqslant 1 \end{cases}.$$

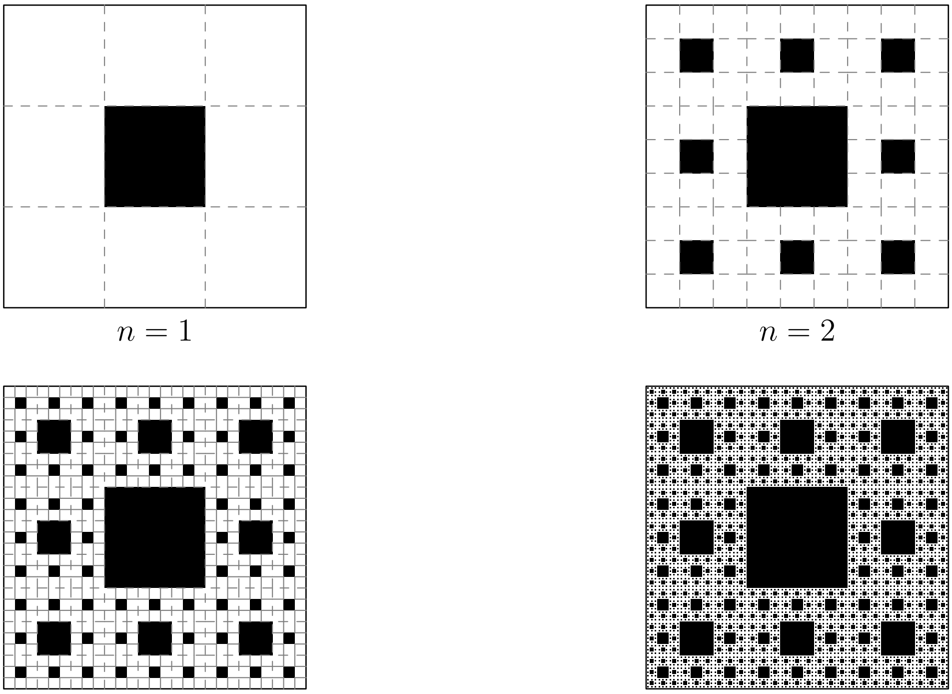
a) Calculer u_2, u_3 et u_4.

b) Démontrer que cette suite est croissante.

c) Démontrer que 7 est un majorant de cette suite.

d) Justifier que cette suite converge et calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Problème 5 (10 points)
Un carré de côté 1 est divisé en 9 carrés égaux. Le carré du centre est noirci. On note u_1 l'aire du carré noirci.
Ensuite, chacun des 8 carrés restants est divisé en 9 carrés égaux, et chaque fois le carré du centre est noirci. On note u_2 la somme des aires des carrés noircis, après cette deuxième division.
On continue ainsi, indéfiniment, et on note u_n la somme des aires des carrés noircis, après n divisions.



$n = 1$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ $n = 3$ $\quad$ n grand

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Vérifier que $u_3 = \frac{217}{729}$.

c) Définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manière récursive.

d) Donner une expression pour u_n, où $n \in \mathbb{N}^\star$.

e) Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Problème 6 (13 points)
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de manière récursive par

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_1 = 21 \\ u_{n+1} = 2\,u_n + 8\,u_{n-1} + 9 \quad , n \geqslant 1 \end{cases} .$$

a) Trouver une expression pour le terme de rang n, où $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer u_2 de deux manières différentes.

Problème 1 (11 points)
Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 6 \mod 14 \\ x \equiv 12 \mod 15 \\ x \equiv 16 \mod 17 \end{cases}$$

Problème 2 (10 points)
Herlock et Atson ont pris l'habitude d'utiliser le système RSA pour se transmettre diverses informations. La clé publique d'Atson est (589 ;7). Herlock envoie à Atson le message 61 pour lui communiquer le numéro de Backer Street auquel ils doivent se retrouver.

Déchiffrer le message. Où est fixé le rendez-vous ?

Problème 3 (17 points)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + y' - 12\,y - 65\,\sin(2\,x) = 0$

b) $(4\,x^2 + 1) \cdot y' = (1 + 4\,x)y$

Problème 4 (11 points)
Soit l'application

$$\begin{aligned} f\,:\, \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{13}\,(5 + 12i)\,z + 4 - 32i. \end{aligned}$$

a) Vérifier que f correspond à une isométrie et déterminer le type de cette dernière. Préciser ses éléments caractéristiques (vecteur s'il s'agit d'une translation, centre et angle s'il s'agit d'une rotation, axe s'il s'agit d'une symétrie et enfin axe de symétrie et vecteur s'il s'agit d'un renversement sans point fixe).

b) On donne les nombres $z_1 = 0$, $z_2 = 13$ et $z_3 = 13i$. Calculer $z_1' = f(z_1)$, $z_2' = f(z_2)$ et $z_3' = f(z_3)$, puis reporter ces six valeurs sur la figure annexée. Déterminer ensuite graphiquement les éléments caractéristiques de l'isométrie (sans faire usage des résultats obtenus à la partie précédente).

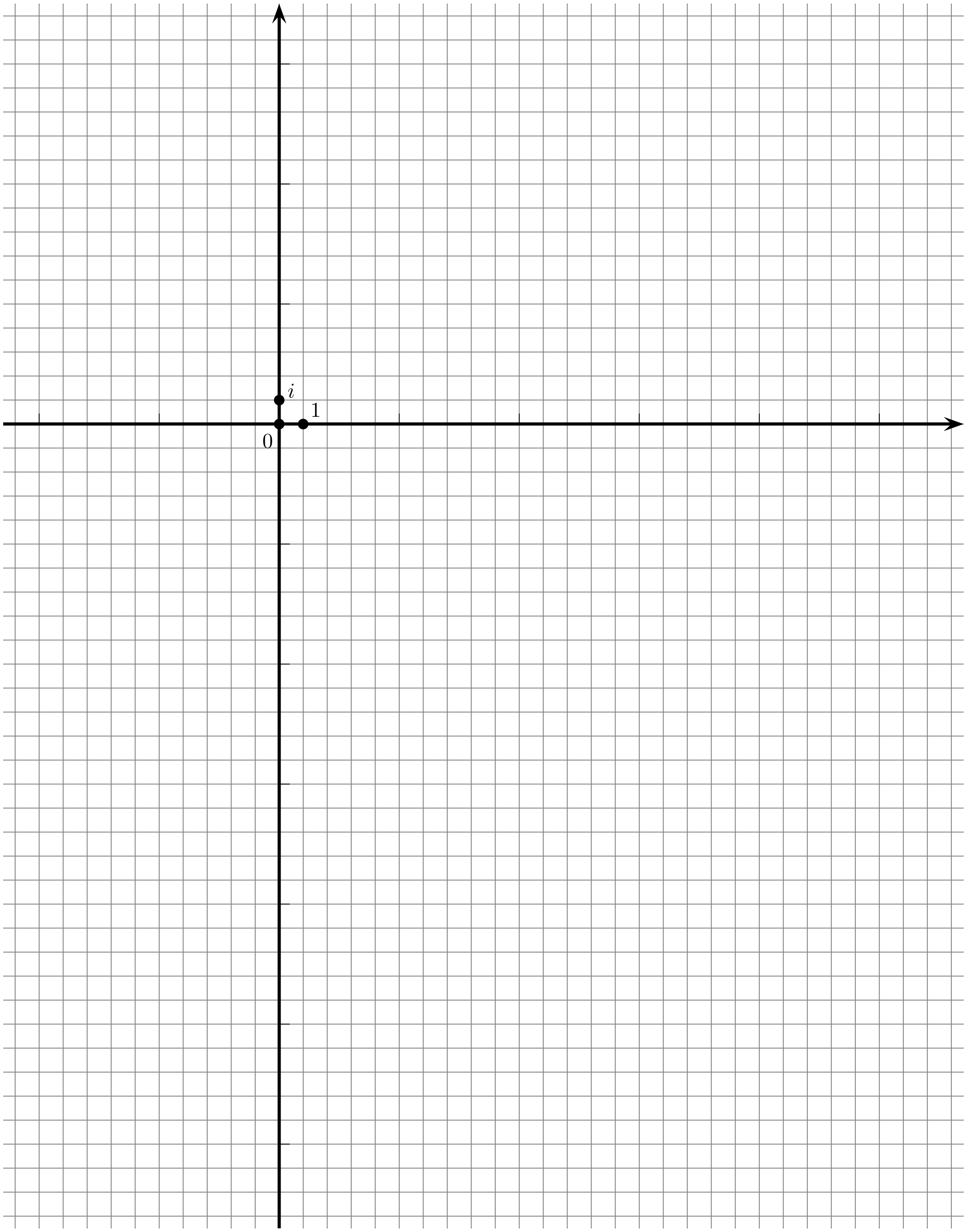
Problème 5 (6 points)

a) Déterminer le polynôme de Taylor de degré 3 de la fonction $f(x) = \cos(6\,x)$ au voisinage de $a = \frac{\pi}{6}$.

b) Utiliser le résultat précédent pour estimer $f(\frac{1}{2}) = \cos(3)$.

Nom, prénom : ____________________

Annexe du problème 4



Problème 1 (15 points)
Un messager livre au service de renseignement Vert le message 322 signé 287.

Selon les dires du messager, ce message émanerait de l'unité Rouge infiltrée dans le pays Bleu ; il contiendrait le nombre de supers ordinateurs de l'armée bleue.

Avant de livrer le message au président, il s'agit

a) de le décrypter à l'aide de la clé secrète du service de renseignement Vert ($n = 493; p = 17; q = 29; e = 69; d = 13$) ;

b) de vérifier son authenticité à l'aide de la clé de l'unité Rouge ($n_{\mathrm{R}} = 437; e_{\mathrm{R}} = 7$).

Problème 2 (8 points)
Démontrer par récurrence la relation pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1^2 - 1 + 2^2 - 2 + 3^2 - 3 + \cdots + n^2 - n = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}.$$

Problème 3 (17 points)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est suggérée par

$\sqrt{2}\,;\quad \sqrt{1+\sqrt{2}}\,;\quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}\,;\quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}\,;\quad \ldots$

a) Définir cette suite par une relation de récurrence.

b) Sachant que la suite est convergente, calculer sa limite.

c) Montrer que la suite est convergente.

Problème 4 (9 points)
Trouver la somme de tous les nombres entiers de 1 à 3000 qui ne sont multiples ni de 7, ni de 11.

Problème 5 (10 points)
On considère la somme $\dfrac{5}{1\cdot 3} + \dfrac{5}{2\cdot 4} + \dfrac{5}{3\cdot 5} + \dfrac{5}{4\cdot 6} + \cdots$

a) Quel est le terme général de cette série ?

b) Vérifier que $\dfrac{5}{k(k+2)} = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right)$.

c) Calculer la k^{e} somme partielle s_k de cette série.

d) En déduire qu'elle converge et calculer sa somme.

Problème 6 (15 points)
Un restaurateur vient de recevoir sa commande de vin : 23 bouteilles *réserve spéciale* ainsi qu'un grand nombre de cartons de 6 bouteilles. Il désire ranger toutes les bouteilles commandées dans des casiers qui peuvent contenir chacun 35 bouteilles.
Après avoir rempli ses étagères, il réalise qu'il lui reste deux bouteilles qu'il offre au livreur pour le remercier de l'avoir aidé.
Combien de bouteilles le restaurateur a-t-il commandé au maximum si ce nombre est plus petit que mille ?

Problème 1 (14 points)
Une bande de 26 pirates s'est emparée d'un trésor contenant des pièces d'or de même valeur. Ils décident de se les répartir équitablement et de donner le reste au cuisinier. Celui-ci recevrait alors 17 pièces.

Une bagarre éclate entre les pirates et 13 d'entre eux meurent. Le cuisinier se rend compte qu'il va recevoir finalement 4 pièces.

Le cuisinier décide alors de se rebeller et exige un partage équitable, sous peine de ne plus faire à manger pour les pirates. Ceux-ci acceptent la demande du cuisinier, font le partage et jettent les 9 pièces restantes à la mer.

Sachant qu'il y avait entre 600 et 700 pièces d'or dans le trésor, combien ce dernier en contenait-il ?

Problème 2 (19 points)
Romane et Julien utilisent le système RSA pour se transmettre les dates de leurs rendez-vous secrets. Romane a choisi la clé publique $(n_{\mathrm{A}}, e_{\mathrm{A}}) = (133, 5)$ et Julien $(253, 5)$.

a) Romane demande à Julien de changer de clé, car son choix n'est pas bon. Expliquer pourquoi.

Julien choisit alors la clé publique $(n_{\mathrm{B}}, e_{\mathrm{B}}) = (253, 63)$.

b) Quel est le message chiffré non signé que Julien doit envoyer à Romane, s'il veut fixer l'heure du rendez-vous à 8 ?

Romane pense que quelqu'un est au courant de leur rendez-vous. Elle décide donc d'envoyer le message chiffré signé $(148, 185)$ à Julien pour changer l'heure.

c) Quel est l'heure fixée par Romane ?

d) Julien peut-il se fier à ce message ?

Problème 3 (18 points)
Résoudre les équations différentielles suivantes.

a) $(1 - x^2)\, y' - 2xy = x^2$, pour $x \in \,]-1; 1[$.

b) $y'' + 2y' + 5y = e^{3x}$.

Problème 4 (10 points)
Soit p un nombre réel. Considérons la série de terme général

$$u_n = \frac{n+1}{2(n+2)} \cdot n^p.$$

a) Déterminer si cette série converge lorsque $p = 1$.

b) Déterminer si cette série converge lorsque $p = -1$.

c) Discuter de la convergence de cette série lorsque $p < -1$.

Problème 5 (11 points)
Considérons la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $x_0 = 1$ et

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{3 + 2x_n}.$$

a) Écrire les quatre premiers termes de cette suite.

b) Est-ce que $x_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$? Justifier.

c) En admettant que $x_{n+1} - x_n < 0$ pour tout $n \geqslant 0$, montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente, puis calculer sa limite.

d) Montrer par récurrence que $x_{n+1} - x_n < 0$ pour tout $n \geqslant 0$.

Problème 1 (15 points)
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{13x^2 - 6x + 8}{x^4 - 2x^3 - 8x^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int x \cdot \cos^2(x)\, dx$

Problème 2 (17 points)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $xy' + 3y = x^4 + 2x^3$

b) $y'' - 5y' + 6y = e^{2x} + 5e^{4x}$

Problème 3 (25 points)
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit la fonction complexe

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{5}(3 - 4i)\,\overline{z} + (-9 - 3i) \end{aligned}$$

a) Vérifier que f est une isométrie et prouver qu'il s'agit d'un renversement sans point fixe (appelé aussi symétrie glissée).

b) On donne les nombres $z_1 = 0$, $z_2 = 5$ et $z_3 = 5i$.
Calculer $z_1' = f(z_1)$, $z_2' = f(z_2)$ et $z_3' = f(z_3)$, puis reporter ces six valeurs sur la figure annexée.

c) Sur la figure annexée, construire ensuite les éléments caractéristiques du renversement sans point fixe, à savoir l'axe de symétrie ainsi que le vecteur de translation parallèle à l'axe de symétrie. Donner une brève marche à suivre.

Partie B

Construire l'image de la figure donnée en annexe (composée des segments $a = \mathrm{MN}$, $b = \mathrm{PQ}$ ainsi que des demi-cercles α et β) par l'inversion par rapport au cercle γ de centre Ω.

Une marche à suivre n'est pas exigée mais les images a', b', α' et β' doivent apparaître clairement sur la feuille.

Problème 4 (16 points)
Alexandra veut envoyer le message secret $m = 27$ à Bernt. Elle décide de le crypter avec le système de cryptage RSA.

La clé privée de Bernt est $(p; q; d) = (7; 19; ?)$ et sa clé publique est $(n; e) = (?; 11)$.

a) Montrer que $\varphi(133) = 108$, où φ est la fonction indicatrice d'Euler.

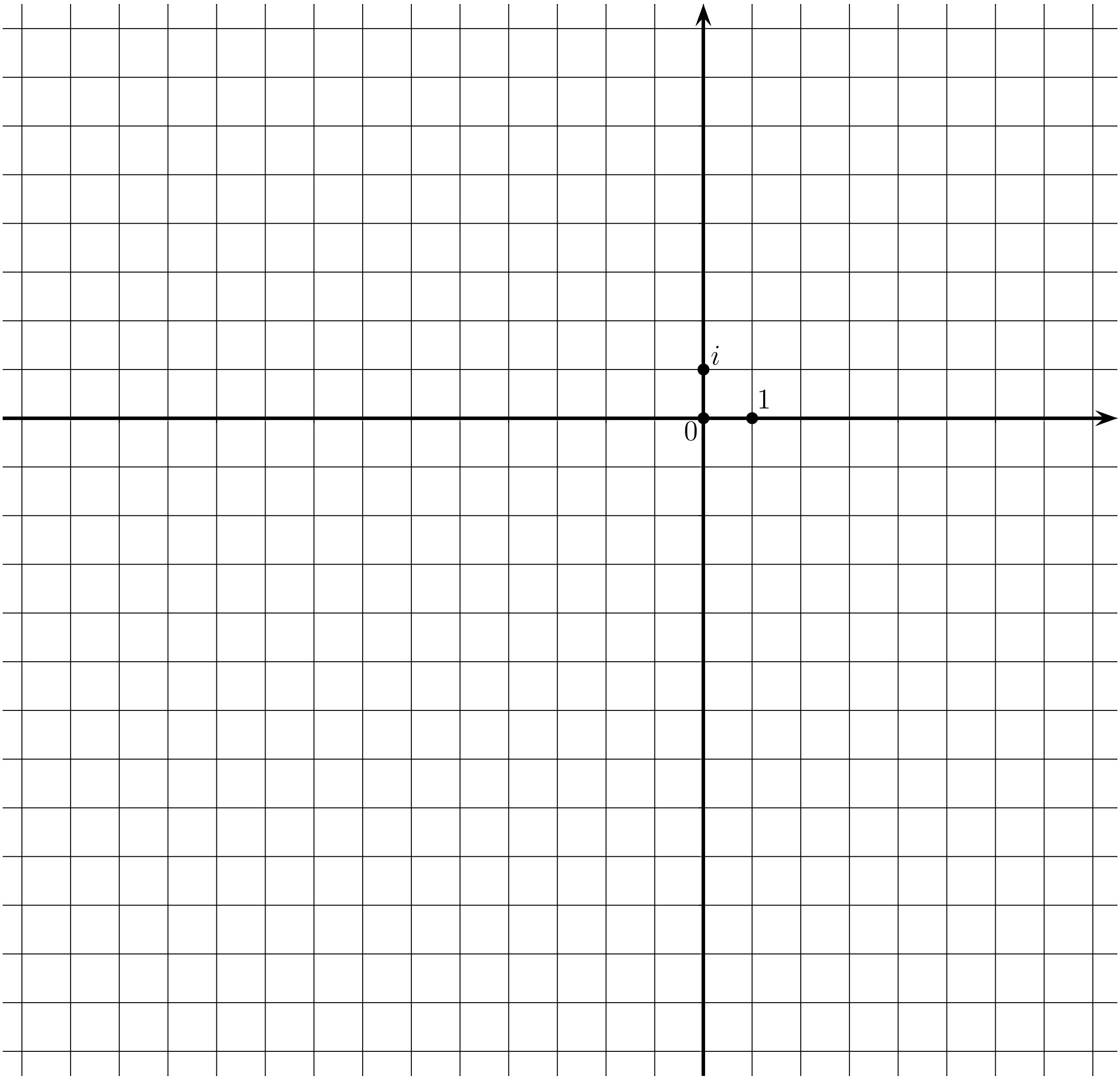
b) Déterminer toutes les solutions de l'équation diophantienne $11x + \varphi(133)y = 1$.

c) Donner le nombre d.

d) Quel est le message codé qu'Alexandra envoie à Bernt ?

Nom, prénom : ____________

Annexe du problème 3, partie A



Nom, prénom : ______________________

Annexe du problème 3, partie B