Problème 1

On a $f(x) = \dfrac{-2x^3}{x^2-1}$ a) $ED_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $Z = \{0\}$

		-1		0		1	
$-2x^3$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \text{"}\dfrac{-2}{0}\text{"} = \infty$, AV : $x = 1$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \text{"}\dfrac{2}{0}\text{"} = \infty$, AV : $x = -1$.

AO :

$$\begin{array}{l|l} -2x^3 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -(-2x^3+2x) & -2x \\ \cline{1-1} -2x & \end{array}$$

donc AO : $y = -2x$ et $\delta(x) = \dfrac{-2x}{x^2-1}$

		-1		0		1	
$\delta(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

b) $f'(x) = \dfrac{-6x^2(x^2-1) + 2x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x^4 + 6x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$-2x^2$	$-$		$-$		$-$	0	$-$		$-$		$-$
x^2-3	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x^2-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	—	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$

f' s'annule en 0 ; $\pm\sqrt{3}$

min $m(-\sqrt{3} ; \underbrace{-3\sqrt{3}}_{\cong -5,2})$

et max $M(\sqrt{3} ; \underbrace{3\sqrt{3}}_{\cong 5,2})$

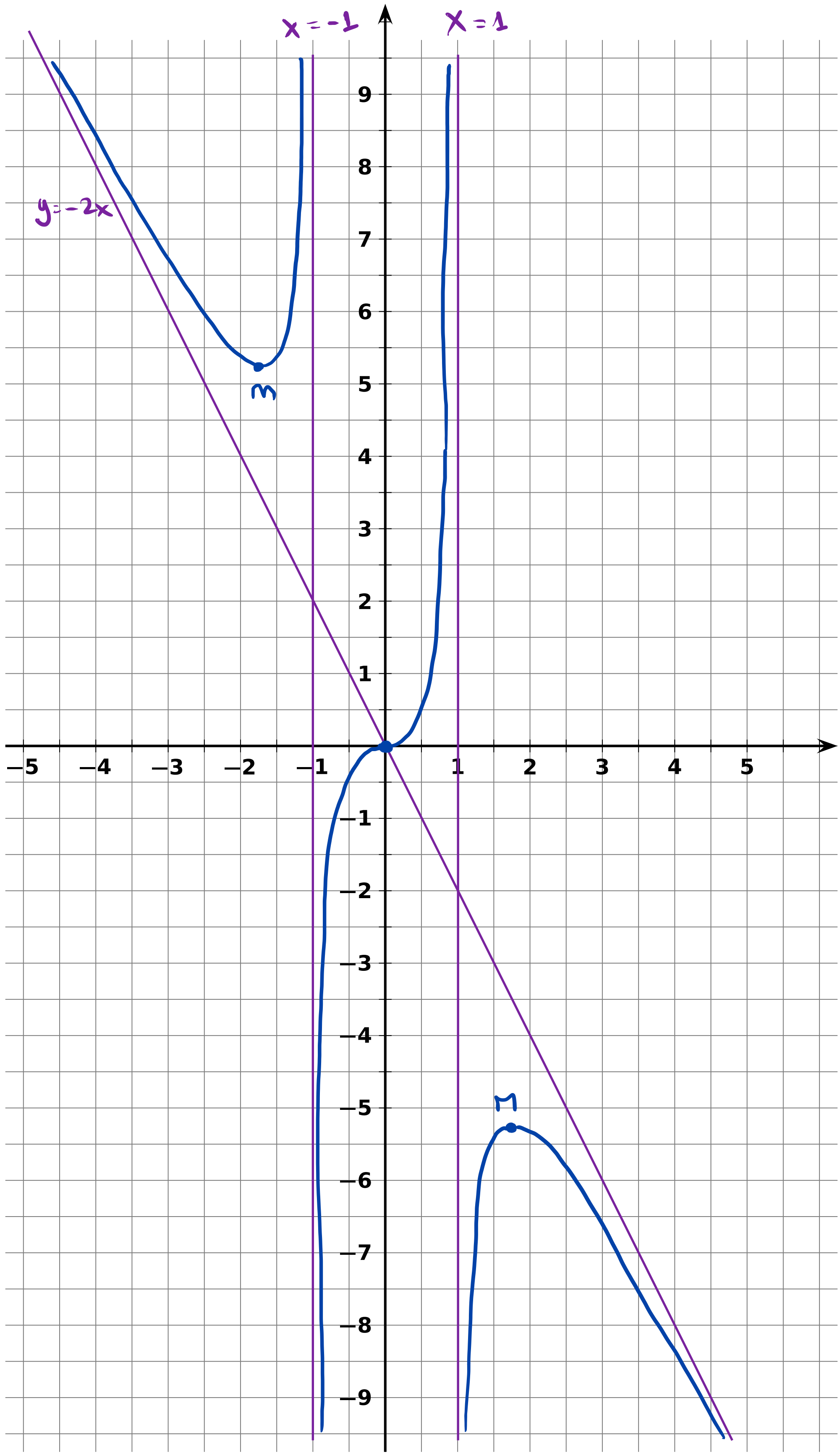
et plat $(0;0)$

c) Sur l'annexe.

d) $f(-x) = \dfrac{-2(-x)^3}{(-x)^2-1} = \dfrac{\underbrace{2x^3}_{= -(-2x^3)}}{x^2-1} = -f(x)$, donc le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine. (f est impaire)

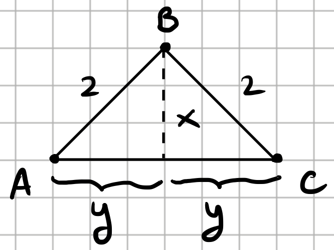
Nom, prénom :

Annexe du problème 1



Exercice 2 (optimisation)

a)



On a $x^2 + y^2 = 2^2$ donc $y = \sqrt{4 - x^2}$

donc $\delta(A;C) = 2y = 2\sqrt{4-x^2}$

b) On a $V = \mathcal{A}_{ABC} \cdot \underbrace{4}_{\text{profondeur de l'abri}} = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot x \cdot 4 = 4x\sqrt{4-x^2}$

c) Posons $f(x) = V^2(x) = 16x^2(4-x^2) = 16(4x^2 - x^4)$.

On a VA $= [0;2]$. On calcule

$$f'(x) = 16(8x - 4x^3) = 64x(2-x^2)$$ qui s'annule en $\pm\sqrt{2}$ et 0.

On a

x	0		$\sqrt{2}$		2
$64x$	0	$+$		$+$	
$2-x^2$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(x) = V^2(x)$ est maximal si $x = \sqrt{2}$

d) $f(\sqrt{2}) = 16 \cdot 2 \cdot (4-2) = 64$ donc le volume maximal est $\sqrt{64} = 8\, m^2$.

Problème 3

A. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$. $ED_f =]0;+\infty[\setminus \{1\}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \overset{BH}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1/x}{1} = 1$, il y a un trou en $(1;1)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \text{"}\dfrac{-\infty}{-1}\text{"} = \infty$, AV en $x=0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty} \overset{BH}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$, AH : $y=0$ à droite.

B. i) On a $e^{2x-6} = e^{-x} \iff 2x-6 = -x \iff 3x = 6 \iff x = 2$

donc $A(2; e^{-2})$

ii) $A = \displaystyle\int_0^2 \underbrace{(e^{-x} - e^{2x-6})}_{\text{la fct g est décroissante, donc c'est elle qui est au-dessus sur le schéma}} dx = \left(-e^{-x} - \tfrac{1}{2}e^{2x-6}\right)\Big|_0^2$

$= -e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2} + e^{0} + \frac{1}{2}e^{-6} = -\frac{3}{2}e^{-2} + 1 + \frac{1}{2}e^{-6}$

$\cong 0{,}798$

C. On a $f'(x) = -2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$ et $f'(\frac{\pi}{3}) = -2\sin(\frac{\pi}{2}) = -2$

donc $(t): y = -2x + h$.

Comme $f(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, on a $0 = \frac{-2\pi}{3} + h$ donc $h = \frac{2\pi}{3}$

et $(t): y = -2x + \frac{2\pi}{3}$.

Problème 4 (MR)

a) On a $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$, donc

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -84 \\ 28 \\ 42 \end{pmatrix} = 14 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donc $(\pi) : 6x - 2y - 3z = 22$

b) On a $M_{AB}\left(\frac{15}{2} ; -\frac{1}{2} ; 8\right)$, donc

$(\mu_{AB}) : x + 9y - 4z = -29$.

De même, $M_{BC}\left(\frac{11}{2} ; \frac{5}{2} ; 2\right)$ et $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$ donc

$(\mu_{BC}) : 5x + 3y + 8z = 51$.

c) Cette droite a un vecteur directeur normal à $\vec{AB}$ et à $\vec{BC}$ donc normal à π. Par conséquent $\vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. De plus $D \in \mu_{AB}$ car $-1 - 4 \cdot 7 = -29$ et

$D \in \mu_{BC}$ car $5 \cdot (-1) + 8 \cdot 7 = 51$.

Ainsi $(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

d) Posons $\Omega(-1-6k ; 2k ; 7+3k)$. On veut

$$7\sqrt{5} = \|\vec{A\Omega}\| = \left\| \begin{pmatrix} -8-6k \\ 5+2k \\ -3+3k \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \sqrt{64 + 96k + 36k^2 + 25 + 20k + 4k^2 + 9 - 18k + 9k^2}$$

$$= \sqrt{49k^2 + 98k + 98} = 7\sqrt{k^2 + 2k + 2}$$

Donc $k^2 + 2k + 2 = \pm 5$

$\nearrow$ $\underbrace{k^2 + 2k - 3}_{(k+3)(k-1)} = 0$

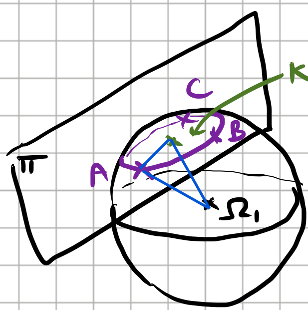
$\searrow$ $\underbrace{k^2 + 2k + 7}_{\Delta = 4 - 28 < 0} = 0$

[ou $d \cap \Omega$:
$(6k-8)^2 + (-2k+5)^2 + (-3k-3)^2 = 245 \Leftrightarrow \ldots\ 7(k^2 - 2k - 3) = 0$
$S = \{3 ; -1\}$]

Ainsi $k = 1$ et $\Omega_2(-7\,;2\,;10)$ ou $k = -3$ et $\Omega_2(17\,;-6\,;-2)$.

$$\Rightarrow (\Sigma) : (x+7)^2 + (y-2)^2 + (z-10)^2 = \underbrace{(7\cdot\sqrt{5})^2}_{245}$$

f) $6(-1-6k) - 2\cdot 2k - 3(7+3k) = 22 \Leftrightarrow$
$49k = -49$ donc $k = -1$ et $K(5\,;-2\,;4)$.



$K \in d$ donc $\delta(K,A) = \delta(K,B) = \delta(K,C)$
Ainsi K est le centre de γ.

$$r^2 = \|\overrightarrow{A\Omega_2}\|^2 - \|\overrightarrow{K\Omega_2}\|^2$$
$$= 49\cdot 5 - \left\|\begin{pmatrix}-12\\4\\-6\end{pmatrix}\right\|^2$$
$$= 49, \text{ donc } r = 7.$$

Problème 5 (probabilités)

A. a) $\underbrace{3!}_{\text{ordre des disciplines}} \cdot 24! \cdot 19! \cdot 7! \cong 2,28235 \cdot 10^{45}$ possibilités.

b) Il n'y a donc qu'une discipline qui a 3 enseignants et les autres en ont 2. Donc :

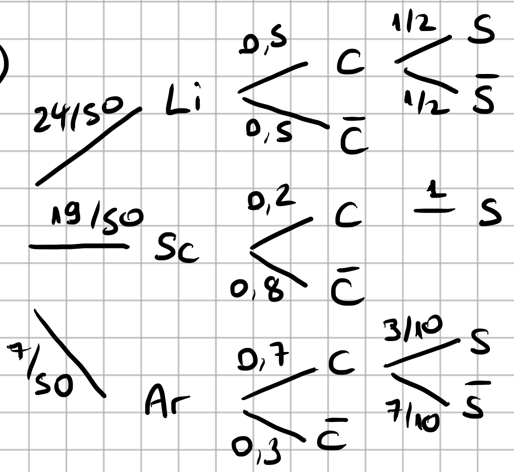
$$\underbrace{C_3^{24} \cdot C_2^{19} \cdot C_2^{7}}_{\text{3 ens. de littérature}} + \underbrace{C_2^{24} \cdot C_3^{19} \cdot C_2^{7}}_{\text{3 de sciences}} + C_2^{24} \cdot C_2^{19} \cdot C_3^{7} =$$

$$= 7'268'184 + 5'616'324 + 1'651'860 = 14'536'368.$$

c) i) Il y a 5 couleurs, donc $5^3 = 125$ possibilités.

ii) Cela donc $A_3^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ possibilités

B. d)



Nombre d'enseignants

$n = 24 + 19 + 7 = 50$

e) $p(S) = \frac{24}{50} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} +$

$+ \frac{19}{50} \cdot 0,2 + \frac{7}{50} \cdot 0,7 \cdot \frac{3}{10} =$

$= \frac{1127}{5000} = 22,54\,\%$

f) $p(Li \mid S) = \frac{p(Li \cap S)}{p(S)} = \frac{\frac{24}{50} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{0,2254} = \frac{600}{1127} \cong 53,24\,\%$

Probleme 6

a)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&2&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&-1&1&0&0\\ 0&2&1&0&-1&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2-L_1\\ L_3-L_1\\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&-1&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&-2&1&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3-2L_2\\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cccc} &1&0&0&0\\ I_4&-1&1&0&0\\ &1&-2&1&0\\ &-1&2&-1&1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4-L_3 \end{array}$$

$$\text{donc} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ -1&1&0&0\\ 1&-2&1&0\\ -1&2&-1&1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} = \begin{pmatrix} 3&0&0&0\\ -3&3&0&0\\ -2&4&-2&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

b) On a
$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 1&1&0&0\\ 1&2&1&0\\ 0&0&1&1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3&0&0&0\\ 0&3&0&0\\ 0&0&-2&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ -1&1&0&0\\ 1&-2&1&0\\ -1&2&-1&1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 3&0&0&0\\ 0&3&0&0\\ -5&10&-2&0\\ -2&4&-2&0 \end{pmatrix}}_{=A} \qquad \begin{pmatrix} 3&0&0&0\\ 3&3&0&0\\ 3&6&-2&0\\ 0&0&-2&0 \end{pmatrix}$$

c) On a B = base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $B' = \{\underline{v_1}; \dots; \underline{v_4}\}$

où $\underline{v_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\underline{v_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\underline{v_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\underline{v_4} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ (les colonnes de P)

$A = {}_B(f)_B$, $P = {}_B(id)_{B'}$, $P^{-1} = {}_{B'}(id)_B$ donc

$D = P^{-1}AP = {}_{B'}(f)_{B'}$

Par conséquent A et D ont les mêmes valeurs propres, à savoir $\{3; -2; 0\}$

d) On a, de plus, $E_3 = \langle \underline{v_1}, \underline{v_2} \rangle$, $E_{-2} = \langle \underline{v_3} \rangle$ et $\ker(f) = E_0 = \langle \underline{v_4} \rangle$.

e) Non, car $\ker(f) \neq \{\underline{0}\}$.

f) Par le thm du rang $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 - \underbrace{1}_{=\dim\ker(f)}$

Comme $\mathrm{Im}(f)$ est engendrée par les colonnes de A,

On peut choisir $\mathcal{B} = (\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3)$ où

$$\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

g) Si λ est v.p. de A, alors $\exists\, \underline{v} \overset{\neq 0}{\in} \mathbb{R}^4$ tel que $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$

donc $A^n \cdot \underline{v} = \lambda^n \underline{v}$.

Donc $(-2)^n$, 3^n et $0^n = 0$ sont des vp de A^n,

et $\underbrace{E_{\lambda,A}}_{\substack{\text{esp. propre} \\ \text{de } A \text{ ass.} \\ \text{à } \lambda}} = \underbrace{E_{\lambda^n, A^n}}_{\substack{\text{esp. propre} \\ \text{de } A^n \text{ ass.} \\ \text{à } \lambda^n}}$

Problème 1

$$f(x) = \frac{-x^2+4x+5}{x+3}, \quad ED = \mathbb{R} \setminus \{-3\}, \quad \underbrace{x^2-4x-5}_{(x-5)(x+1)} = 0$$

donc $Z = \{-1 ; 5\}$

		-3		-1		5	
$-x^2+4x+5$	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$

AV : $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \frac{"-16"}{0} = \infty$ donc il y a une AV d'éq. $x = -3$.

AO :

	-1	4	5
-3		3	-21
	-1	7	-16

Il y a une AO d'éq. $y = -x + 7$

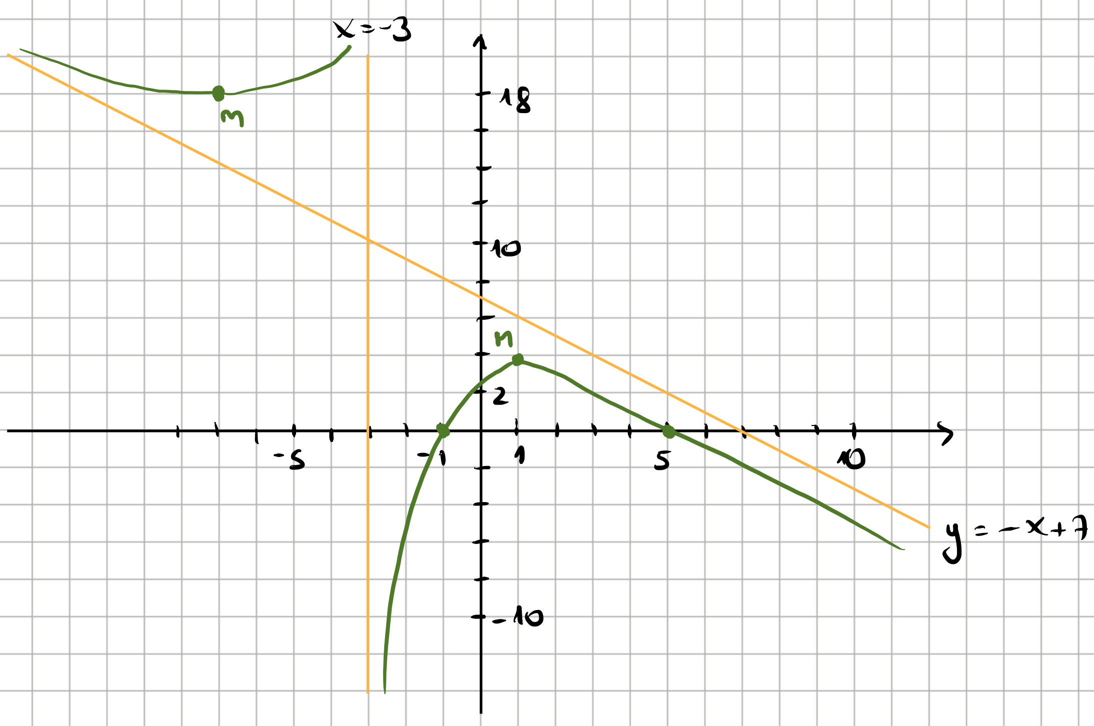
et $\delta(x) = \frac{-16}{x+3}$ donc pas de croisement.

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(-2x+4)(x+3)}^{-2x^2-2x+12} - (-x^2+4x+5)}{(x+3)^2} = \frac{-x^2-6x+7}{(x+3)^2}$$

$x^2+6x-7 = (x+7)(x-1)$ donc $Z_{f'} = \{-7 ; 1\}$.

		-7		-3		1	
$-x^2-6x+7$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$(x+3)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$

Il y a un minimum $m\left(-7 ; \underbrace{\frac{-49-28+5}{-4}}_{18}\right)$ et un maximum en $M(1 ; 2)$.



Problème 2

a) $B(x) = \underbrace{2+4}_{\text{carrés des bords}} + \underbrace{x \cdot 1}_{\text{bord haut}} + \underbrace{2y}_{\text{bords latéraux}} + \underbrace{2x}_{\text{bord bas}} = 3x + 6 + 2y$

Contrainte : $x \cdot y = 54$ donc $y = \frac{54}{x}$.

Ainsi $B(x) = 3x + 6 + \frac{108}{x}$.

b) On cherche x tel que $B(x)$ est minimal. On calcule

$$B'(x) = 3 - \frac{108}{x^2} = \frac{3x^2 - 108}{x^2} = \frac{3(x^2-36)}{x^2}$$

Valeurs admissibles pour x : $x > 0$.

x	0		6	
x^2-36	//	$-$		$+$
x^2	0	$+$		$+$
$B'(x)$	//	$-$		$+$
$B(x)$	//	$\searrow$		$\nearrow$

$B(x)$ est minimal pour $x = 6$ et, dans ce cas, la surface de la tablette vaut $(6+2)(9+3) = 96\text{ cm}^2$.

Probleme 4

A a) $f(2) = 2 + \frac{2}{-2} = 1$ et $g(2) = (\underbrace{2 \cdot 2 - 3}_{=1})^3 = 1$

donc $P \in Gr(f)$ et $P \in Gr(g)$.

b) $f'(x) = \frac{-2}{(x-4)^2}$, $f'(2) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} = m_1$

$g'(x) = 3(2x-3)^2 \cdot 2 = 6 \cdot (2x-3)^2$, $g'(2) = 6 = m_2$.

$\tan(\alpha) = \frac{6 - (-\frac{1}{2})}{1 + 6 \cdot (-\frac{1}{2})} = -\frac{13}{4}$ donc $\alpha \cong 72{,}90°$.

c) $A = \int_2^3 \left(2 + \frac{2}{x-4} \right) dx = \left(2x + 2\ln(|x-4|) \right) \Big|_2^3 =$

$= 6 + 2 \cdot \underbrace{\ln(1)}_{=0} - (4 + 2\ln(2)) = 2 - 2\ln(2) \cong 0{,}61$.

B $V = \pi \int_3^4 e^{2x-6} dx = \frac{\pi}{2} e^{2x-6} \Big|_3^4 = \frac{\pi}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^0$

$= \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) \cong 20{,}07$

Problème 3 - Partie C

$$\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(3x)\, dx =$$

$u(x) = x,\quad u'(x) = 1$

$v'(x) = \sin(3x),\quad v(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x)$

$$= -\frac{1}{3} x \cos(3x) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \cos(3x)\, dx =$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{9}\cos(3x) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{9}.$$

Probleme 4 (Géométrie de l'espace)

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\|\vec{AB}\| = \sqrt{2}$, $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|\vec{BC}\| = \sqrt{2}$ et

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|\vec{AC}\| = \sqrt{2}$. Donc le ΔABC est équilatéral.

b) On calcule $\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc

$(\pi_{ABC}) : x - y - z = \underset{\uparrow \text{ passe par A (par exemple)}}{-1}$.

c) $(\Sigma) : (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = \underbrace{5+4+9+9}_{27}$

donc $D(2;-3;-3)$ et $r = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

d) On a $\delta(D; \pi_{ABC}) = \dfrac{|2+3+3+1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{9}{\sqrt{3}} = \dfrac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} = r$

donc Σ est tangente à π_{ABC}.

e) On a $\vec{OT} = \vec{OD} \underset{\substack{\nearrow \\ \text{voir lequel} \\ \text{est sur } \pi_{ABC}}}{\pm} 3\cdot\sqrt{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{vecteur unitaire} \\ \text{normal à } \pi_{ABC}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

donc $\underbrace{T_1(5;-6;-6)}_{\notin \pi_{ABC}}$ et $\underbrace{T_2(-1;0;0)}_{\in \pi_{ABC}}$ donc $T = T_2$.

f) Calculons I le point d'intersection de $\underbrace{d_{E'E}}_{\substack{\text{droite passant par E et E'} \\ \text{donc passant par E et} \\ \text{normale à } \pi_{ABC}}}$ avec π_{ABC}

$(d_{EE'}) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

$d_{EE'} \cap \pi_{ABC} : (3+k) - (-3-k) - (1-k) = -1 \iff$

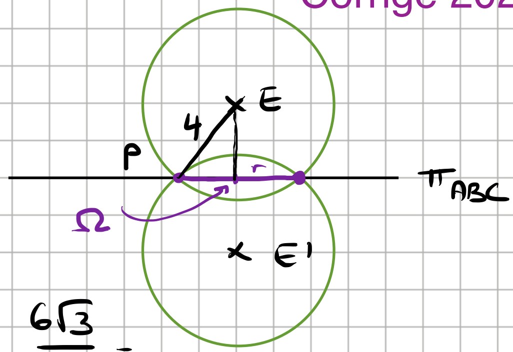
$3k = -6$ donc $k = -2$ et $I(1;-1;3)$

Donc $\vec{OE'} = \vec{OE} + 2\vec{EI} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

et $E'(-1;1;5)$

g) On a $\Omega \in \Pi_{ABC} \cap d_{EE'}$ donc

$\Omega = I(1\,;-1\,;3)$



On a $r = \sqrt{4^2 - \delta(E, \Pi_{ABC})^2}$

$$\delta(E\,;\Pi_{ABC}) = \frac{|3+3-1+1|}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Donc $r^2 = 16 - 4.3 = 4$ et donc $r = 2$.

Probleme 6 (algèbre linéaire)

A

a) $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 24 \\ 5 \\ 89 \end{pmatrix}$$

b) $\ker(f)$: On échelone la matrice :

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} & \begin{matrix} L_3 \\ \\ L_1 \\ \\ \end{matrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -12 & 12 \\ 0 & -27 & 27 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \\ L_4 - 7L_1 \end{matrix} \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ -1/7 \cdot L_2 = L_2' \\ L_3 + 12L_2' \\ L_4 + 27L_2' \end{matrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} L_1 - 4L_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

donc $\begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}$ et $\ker f = \{k(-2\,;1\,;1) \mid k \in \mathbb{R}\}$
$= \langle(-2\,;1\,;1)\rangle$

Comme $\dim(\ker(f)) = 1$, $Rg(f) = 3 - 1 = 2$.

Donc $im(f) = \langle (3\,;2\,;1\,;7), (0\,;1\,;4\,;1)\rangle$.

B

La matrice de g relativement à la base canonique

est $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ k & -1 \end{pmatrix}$

c) $\det(A) = -3-2k$ donc $\det(A) = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$

Ainsi g est inversible $\Leftrightarrow k \neq -\frac{3}{2}$.

d) On a $C_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 2 \\ k & -1-t \end{vmatrix} = (3-t)(-1-t) - 2k$

$= t^2 - 2t - 3 - 2k$

On a $\Delta = 4 - 4(-3-2k) = 16 + 8k$.

Si $\underbrace{\Delta > 0}_{8k > -16 \Leftrightarrow k > -2}$, il y a 2vp distincts donc c'est diagonalisable.

Si $\Delta = 0$, $k = -2$, $C_A(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $E_1 = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ qui est de

dimension $1 <$ multiplicité de 1, donc ce n'est pas diagonalisable.

Si $\Delta < 0$, donc si $k < -2$, il n'y a pas de vp, donc ce n'est pas diagonalisable.

Par conséquent, g est diagonalisable $\Leftrightarrow k > -2$.

e) Si $k = 6$, alors $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $C_A(t) = \underbrace{t^2 - 2t - 15}_{(t-5)(t+3)}$

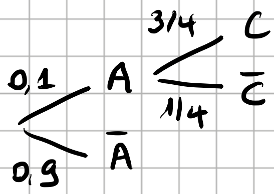
v.p. : 5 et -3.

$E_5 = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{x=y}{=} \langle (1;1) \rangle$.

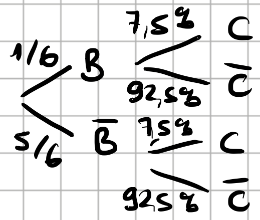
$E_{-3} = \ker \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{-3x=y}{=} \langle (1;-3) \rangle$

Problème 5

a) A = "il y a un contrôleur", C = "Christian se fait contrôler".
B = " Christian prend un billet".



donc $p(C) = 0,1 \cdot \frac{3}{4} = 0,075 = 7,5\%$



b) $p(\bar{B} \cap \bar{C}) = \frac{5}{6} \cdot (100\% - 7,5\%) \cong 77,08\%$

c) $p(\bar{B} \cap C \mid \text{dé pair}) = \dfrac{p(\bar{B} \cap C \cap \text{dé pair})}{p(\text{dé pair})} = \dfrac{\frac{3}{40} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{1/2} =$

$= \frac{2}{3} \cdot 7,5\% = 5\%.$

d) $p(\leq \text{deux contrôles}) = \underbrace{P(0C)}_{=B(0;30;\underbrace{\frac{3}{40}}_{=7,5\%})} + \overbrace{P(1C)}^{=B(1;30;\frac{3}{40})} + \underbrace{P(2C)}_{=B(2;30;\frac{3}{40})} =$

$$= \left(\frac{37}{40}\right)^{30} + C_1^{30} \cdot \frac{3}{40} \cdot \left(\frac{37}{40}\right)^{29} + C_2^{30} \cdot \left(\frac{3}{40}\right)^2 \cdot \left(\frac{37}{40}\right)^{28} \cong 60,68\%$$

e) On cherche n tel que $P(\text{au moins un } C) > 80\%$

donc $1 - \underbrace{P(\text{aucun contrôle})}_{\left(\frac{37}{40}\right)^n} > 0,8 \iff \left(\frac{37}{40}\right)^n < 0,2$

$\iff n \cdot \underbrace{\log(37/40)}_{<0} < \log(0,2) \iff n > \dfrac{\log(0,2)}{\log(37/40)} \cong 20,6$

Il doit donc prendre le train au moins 21 fois.

Problème 1

$$f(x) = \frac{2x^2 - 12x + 18}{x^2 + 2x - 3}$$

a) • D_f : $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3 ; 1\}$

• zéros : $2(x^2 - 6x + 9) = 2(x-3)^2$, $Z = \{3\}$

		-3		1		3	
$2(x-3)^2$	+		+		+	0	+
x^2+2x-3	+	0	−	0	+		+
$f(x)$	+	‖	−	‖	+	0	+

b) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \text{"}\frac{72}{0}\text{"} = \infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \text{"}\frac{8}{0}\text{"} = \infty$ donc

il y a des AV d'équation $x = -3$ et $x = 1$.

• $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ AH d'équation $y = 2$. On résout

$f(x) = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 2x^2 + 4x - 6 \Leftrightarrow 16x = 24$.

$\Leftrightarrow x = 3/2$.

Intersection Graphe - AH : $P(\frac{3}{2} ; 2)$.

c) $$f'(x) = \frac{(4x-12)(x^2+2x-3) - 2(x^2-6x+9)\cdot\overbrace{(2x+2)}^{2(x+1)}}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$= \frac{4(x-3)(x^2+2x-3 - \overbrace{(x-3)(x+1)}^{x^2-2x-3})}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{16x(x-3)}{(x^2+2x-3)^2}$$

		-3		0		1		3	
$16x(x-3)$	+		+	0	−		−	0	+
$(x^2+2x-3)^2$	+	0	+		+	0	+		+
$f'(x)$	+	‖	+	0	−	‖	−	0	+
$f(x)$	↗		↗	max	↘		↘	min	↗

Max $(0 ; -6)$

Min $(3 ; 0)$

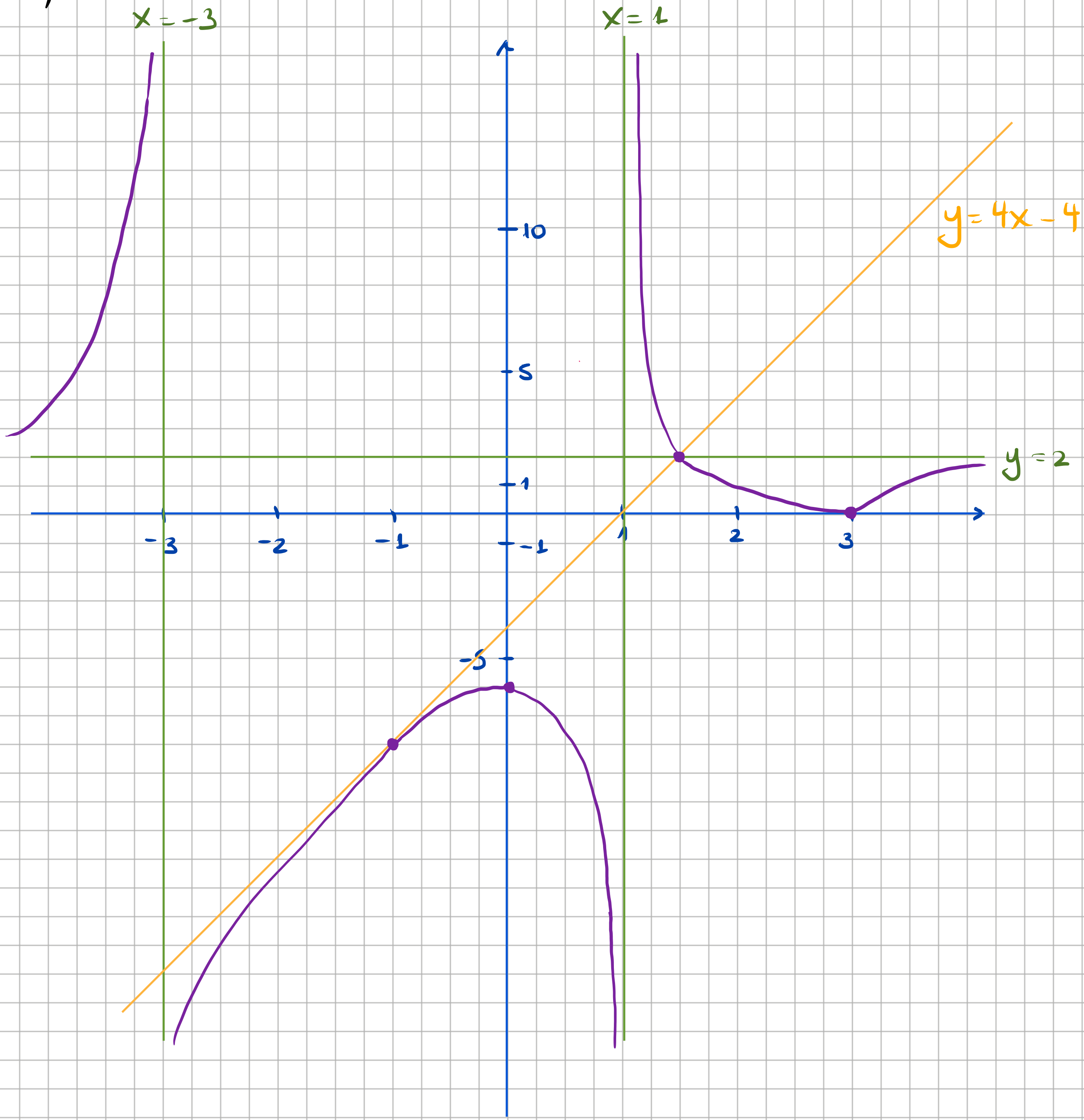
e) On a $f'(-1) = \frac{-16 \cdot (-4)}{(-4)^2} = 4$ donc $y = 4x + h$

et $f(-1) = \frac{2 + 12 + 18}{1 - 2 - 3} = -8 \Rightarrow h = -8 + 4 = -4$

donc (t): $y = 4x - 4$.

Corrige 2023 3Mr

d)



Problème 2

Surface : $12xy + \underbrace{(16-4x)(5-4y)}_{80-20x-64y+16xy} =$

$$= 28xy + 80 - 20x - 64y.$$

Contrainte : $12xy = 15$ donc $y = \frac{5}{4x}$.

On remplace y par $\frac{5}{4x}$:

$$\Rightarrow \quad f(x) = 35 + 80 - 20x - \frac{80}{x} = 115 - 20x - \frac{80}{x}$$

Donc $f'(x) = -20 + \frac{80}{x^2} = \frac{80 - 20x^2}{x^2} = \frac{20(4-x^2)}{x^2}$

Valeurs admissibles : $0 \leq x \leq 4$

donc $x = 2m$, et $y = \frac{5}{8} = 0{,}625$

x	0		2		4
$20(4-x^2)$		$+$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Problème 3

a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x}-1}{2x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \overset{BH}{=} \lim_{x \to 0} \frac{3e^{3x}}{2} = \frac{3}{2}$ et

$\lim_{x \to 3} \frac{\ln(x^2-8)}{x-3} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \overset{BH}{=} \lim_{x \to 3} \frac{2x/(x^2-8)}{1} =$

$= \lim_{x \to 3} \frac{2x}{x^2-8} = \frac{6}{1} = 6$.

b) On résout $x^2+4x+2 = 5x+4 \Leftrightarrow$

$\underbrace{x^2-x-2}_{(x-2)(x+1)} = 0$ donc les courbes se croisent en $x=-1$ et en $x=2$

De plus $\underset{\cup}{x^2-x-2} < 0$ entre -1 et 2 donc

$x^2+4x+2 < 5x+4$ entre -1 et 2.

$\Rightarrow \quad A = \int_{-1}^{2} (5x+4-(x^2+4x+2))\,dx =$

$= \int_{-1}^{2} (-x^2+x+2)\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_{-1}^{2} =$

$= -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}$.

Problème 4

a) On a $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$(d_{AB}) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$

b) $(\Sigma) : (x+2)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = \underbrace{4+4+1}_{=9=3^2}$

donc $C(-2;-2;-1)$ et $r = 3$.

c) On résout

$$\underbrace{(-6+2k+2)^2}_{=(-4+2k)^2} + \underbrace{(-4+k+2)^2}_{(-2+k)^2} + (k+1)^2 = 9 \iff$$

$$16 - 16k + 4k^2 + 4 - 4k + k^2 + k^2 + 2k + 1 = 9 \iff$$

$$6k^2 - 18k + 12 = 0 \iff \underbrace{k^2 - 3k + 2}_{(k-2)(k-1)} = 0$$

donc $k = 1$ et $T_1(-4;-3;1)$ ou $k = 2$ et $T_2(-2;-2;2)$.

d) $\vec{CT_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $(\pi_1) : 2x + y - 2z = -13$ ← par T_1

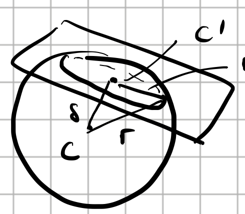
et $\vec{CT_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $(\pi_2) : z = 2$ ← par T_2

e) On cherche $\pi_1 \cap \pi_2$: $\begin{cases} 2x + y - 2z = -13 \\ z = 2 \end{cases}$

donc $2x + y = -9$. Si $x = k$, $y = -2k - 9$ et $z = 2$.

La droite cherchée a donc pour équation

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$.



f) On calcule la distance

$$\delta(C;\pi) = \frac{|2 \cdot (-2) - 2 - 5 \cdot (-1) + 16|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{15}{\sqrt{30}} = \frac{15\sqrt{30}}{30} = \frac{1}{2}\sqrt{30}$$

$\cong 2{,}74 < 3 = r$.

Donc $r' = \sqrt{r^2 - \delta^2} = \sqrt{9 - \frac{15}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

et $C' \in \pi \cap (CC')$ où (CC') = perp. à π par C,

donc $(CC') : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

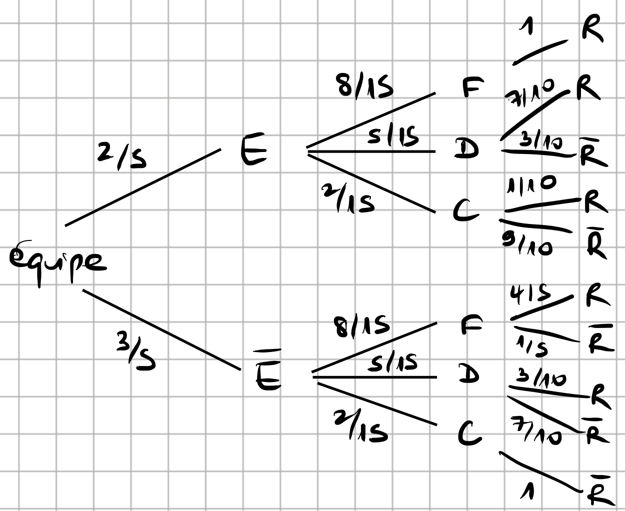
$\Rightarrow 2(-2+2k) + (-2+k) - 5(-1-5k) + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$30k = -15$ donc $k = -\frac{1}{2}$ et $C'\left(-3 ; -\frac{5}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.

Problème 5

Posons E = "joueur experimenté", F = "niveau facile", D = "niveau difficile", C = "niveau cauchemardesque" et R = "réussir".

a)



b) $p(R) = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{8}{15} + \frac{5}{15}\cdot\frac{7}{10} + \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{10}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{8}{15}\cdot\frac{4}{5} + \frac{5}{15}\cdot\frac{3}{10}\right)$

$= \frac{157}{250} = 62{,}8\,\%$.

c) $p(R\,|\,C) = \frac{p(R\cap C)}{p(C)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\cancel{\frac{2}{15}}\cdot\frac{1}{10}}{\cancel{\frac{2}{15}}} = \frac{1}{25} = 0{,}04 = 4\,\%$.

d) $p(\bar{E}\,|\,\bar{R}) = \frac{p(\bar{E}\cap\bar{R})}{p(\bar{R})} = \frac{\frac{3}{5}\left(\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{5} + \frac{5}{15}\cdot\frac{7}{10} + \frac{2}{15}\right)}{1-0{,}628} =$

$= \frac{71}{93} \cong 76{,}34\,\%$.

e) $B(10;\,7;\,0{,}628) = C^{10}_{7}\cdot 0{,}628^{7}\cdot 0{,}372^{3} \cong 23{,}80\,\%$.

f) $1 - B(10;\,0;\,0{,}628) = 1 - 0{,}372^{10} \cong 99{,}99\,\%$

Problème 6

a) i) On calcule $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & k-1 & 3 \\ k & 2 & -1 \end{vmatrix}$ avec $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & k-1 & 3 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$= -k+1+6k-4+k^2-k-6+4$$
$$= k^2+4k-5 = (k-1)(k+5)$$

Donc f est bijective $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $k \neq 1$ et -5.

ii) Si $k=1$, f n'est pas bijective donc $Rg(A) < 3$.

$$\ker A_1 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix}$$

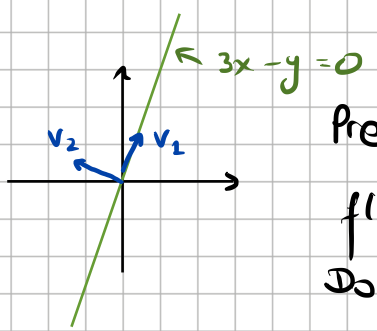
donc $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -4y+5z=0 \end{cases}$ On pose $z = 4k$, $4y = 20k$ donc $y = 5k$ et $x = -10k+4k = -6k$

$\ker A = \{ k(-6;5;4) \mid k \in \mathbb{R} \}$ et une base du noyau est $\{(-6;5;4)\}$.

Donc $Rg(A) = 2$ et l'image de A est engendrée par les colonne de A.

Une base de $\operatorname{Im} f$ est $\{(1;2;1), (2;0;2)\}$ (ou $(1;0;1)$)

b)



Prenons $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = -v_2$.

Donc, relativement à la base $B' = (v_1, v_2)$ la matrice de f est donnée par $D = {}_{B'}(f)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Si B est la base canonique, on a

$$_B(f)_B = \underbrace{_B(id)_{B'}}_{=T=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \cdot D \cdot \underbrace{_{B'}(id)_B}_{=T^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Problème 1

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{4x^2+5x}$$

D_f : $4x^2+5x = x(4x+5) = 0 \iff x=0$ ou $x = -\frac{5}{4}$

donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5/4 ; 0\}$

$Z_f = \emptyset$,

		$-5/4$		0	
$f(x)$	$+$	‖	$-$	‖	$+$

car $e^{3x} > 0$ pour tout x.

AV : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \text{"}\frac{1}{0}\text{"} = \infty$ et $\lim\limits_{x \to -5/4} \text{"}\frac{e^{-15/4}}{0}\text{"} = \infty$

donc il y a des AV en $x=0$ et $x = -\frac{5}{4}$.

AH : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \text{"}\frac{0}{\infty}\text{"} = 0$ donc il y a une AH à gauche d'équation $y = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \overset{BH}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{3e^{3x}}{8x+5} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \overset{BH}{=}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{9e^{3x}}{8} = \infty$$ donc pas d'AH à droite.

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}(4x^2+5x) - e^{3x}(8x+5)}{(4x^2+5x)^2} =$$

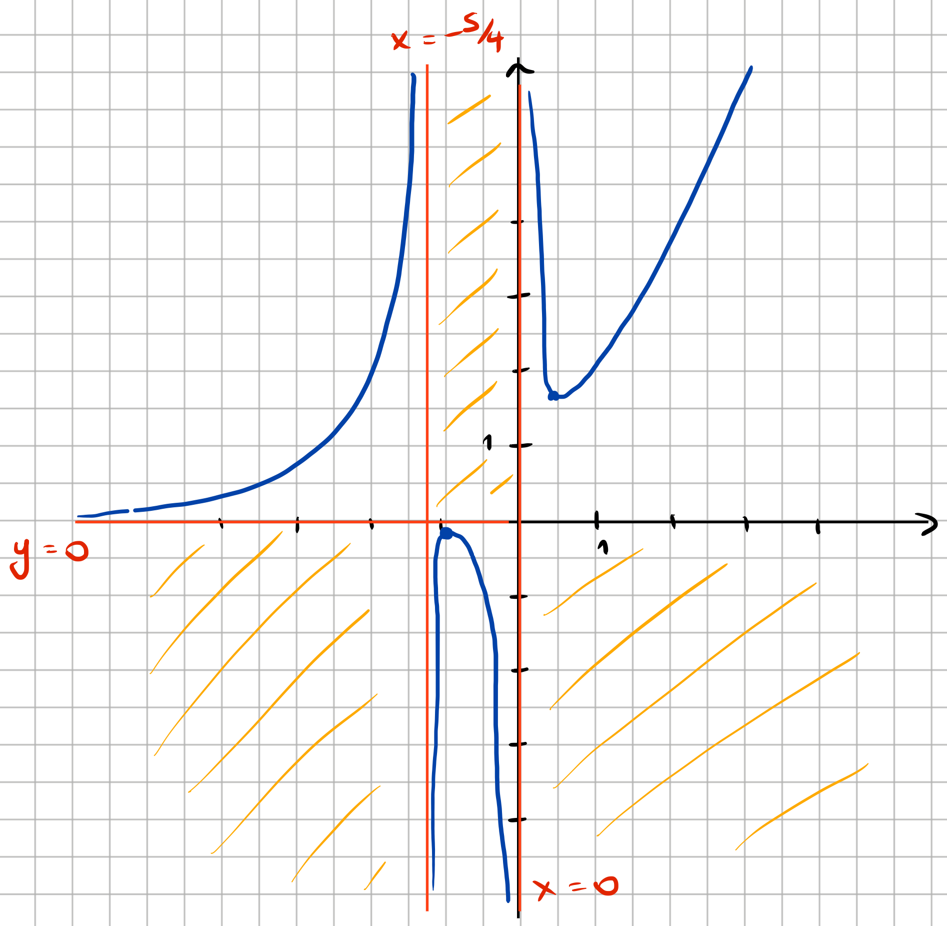
$$= \frac{e^{3x}(12x^2+15x-8x-5)}{(4x^2+5x)^2} = \frac{e^{3x}(12x^2+7x-5)}{(4x^2+5x)^2}$$

zéros de f' : $\Delta = 49 + 240 = 289$, $x_{1,2} = \frac{-7 \pm 17}{24}$ $\nearrow 5/12$, $\searrow -1$

		$-5/4$		-1		0		$5/12$	
e^{3x}	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$12x^2+7x-5$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$(4x^2+5x)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	max	$\searrow$	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$

On a un maximum en $M(-1 ; -0{,}05)$ et un minimum en $m(5/12 ; 1{,}26)$.

$\approx 0{,}42$



Problème 2

a) $V = \text{base} \cdot \text{hauteur} = (24-4)\left(\frac{45}{2} - 2\right) \cdot 2 = 820$

b) $V(x) = (24-2x)\cdot\left(\frac{45}{2} - x\right)\cdot x = (540 - 45x - 24x + 2x^2)x$

$= 2x^3 - 69x^2 + 540x$

c) On calcule $V'(x) = 6x^2 - 138x + 540 =$

$= 6(\underbrace{x^2 - 23x + 90}) = 0$

$\Delta = 169, \quad x_{1,2} = \frac{23 \pm 13}{2} \to 18, \; 5$

et x doit être ≤ 12 donc $x = 18$ n'est pas admissible

Valeurs admissibles : $0 \leq x \leq 12$

$V(x)$ est maximum si $x = 5$ cm.

	x_2		10	x_1
$V'(x)$	+ 0	−	‖	
$V(x)$	↗ max	↘	‖	

Problème 3

a) $f(x) = x + \frac{5}{x} > 0$ si $x > 0$

On a $f(x) = 6 \Leftrightarrow x^2 + 5 = 6x \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 6x + 5}_{(x-5)(x-1)} = 0$

On a $f(2) = \frac{9}{2} < 6$ donc

$$A = \int_1^5 \left(6 - x - \frac{5}{x}\right) dx = 6x - \frac{1}{2}x^2 - 5\ln(|x|) \Big|_1^5$$

$$= 30 - \frac{25}{2} - 5\ln(5) - 6 + \frac{1}{2} = 12 - 5\ln(5) \cong 3{,}95$$

b) $$V = \pi \int_1^2 \underbrace{\left(x + \frac{5}{x}\right)^2}_{x^2 + 10 + \frac{5^2}{x^2}} dx = \pi \int_1^2 \left(x^2 + 10 + \frac{25}{x^2}\right) dx$$

$$= \pi\left(\frac{1}{3}x^3 + 10x - \frac{25}{x}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \pi\left(\frac{8}{3} + 20 - \frac{25}{2} - \frac{1}{3} - 10 + 25\right) = \frac{149\pi}{6}.$$

$(\cong 78{,}02)$

c) L'équation de l'AO est $y = x$

(Avec une division ordinaire, $f(x) = \frac{x^2+5}{x}$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5 & x \\ \hline -x^2 & x \\ \hline 5 & \end{array}$$

donc $y = x$)

Problème 4

a) On a $\frac{\ln(1)}{1} = 0$ et $\frac{1}{1} - 1 = 0$ donc les deux courbes se coupent en $(1;0)$.

De plus, $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{1/x \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

qui vaut 1 si $x = 1$ et $\left(\frac{1}{x} - 1\right)' = -\frac{1}{x^2}$ qui

vaut -1 si $x = 1$. Donc les deux courbes se coupent bien à angle droit en $(1;0)$.

b) $\Gamma_1 : (x-3)^2 + (y-5)^2 = \underbrace{2 + 9 + 25}_{36}$

donc $C_1(3;5)$, $r_1 = 6$

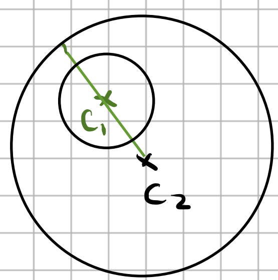
$\Gamma_2 : (x-5)^2 + (y-8)^2 = 2^2$, $C_2(5;8)$ et $r_2 = 2$

$\overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \cong 3,6$

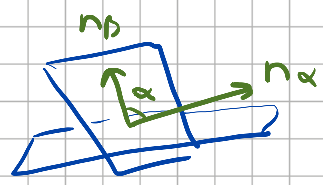
$\Rightarrow \|\overrightarrow{C_1C_2}\| < \overbrace{r_1 - r_2}^{=4}$ donc

C_2 est intérieurs à C_1

↳ ils sont donc disjoints.



Problème 5



a) $\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|} = \frac{-2+4+2}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}} = \frac{4}{9}$$

donc $\alpha \simeq 63{,}61°$.

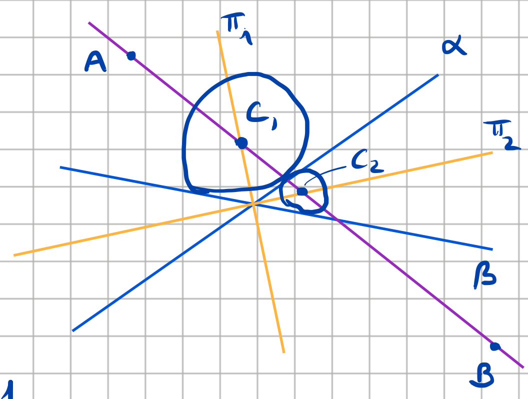
b) $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

donc $(\pi) : 2x - 5y + 6z = -43$.

c) i) On a $\dfrac{2x+2y+z-39}{3} = \pm \dfrac{-x+2y+2z-28}{3}$

$\oplus$ $(\pi_1) : 3x - z = 11$

$\ominus$ $(\pi_2) : x + 4y + 3x = 67$



ii) $d_{AB} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -11 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \\ 27 \end{pmatrix}$

$d_{AB} \cap \pi_1 : 3(4-3k) - (-11+27k) = 11$

$\Leftrightarrow -36k = -12$ donc $k = \frac{1}{3}$ et

$C_1(3 ; 4 ; -2)$, $(\Sigma_1) : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = \underbrace{r^2}_{81}$

où $r = \delta(C_1 ; \alpha) = \dfrac{|6+8-2-39|}{3} = 9 \Rightarrow 81$

$d_{AB} \cap \pi_2 : 4-3k + 4(-3+21k) + 3(-11+27k) = 67$

$\Leftrightarrow 162k = 108$ donc $k = \frac{2}{3}$ et

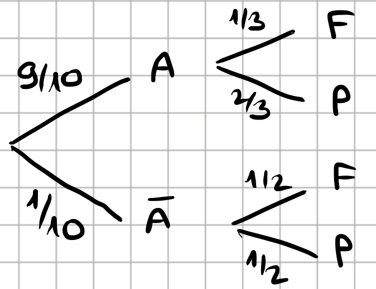
$C_2(2 ; 11 ; 7)$, $(\Sigma_1) : (x-2)^2 + (y-11)^2 + (z-7)^2 = \underbrace{r^2}_{1/9}$

où $r = \delta(C_2 ; \alpha) = \dfrac{|4+22+14-39|}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow 1/9$

Probleme 6

a) $p(7P \text{ et } 2F) = C_2^9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{512}{2187} \cong 23{,}41\,\%$

b) A = la piece est pipee $\qquad p(F) = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{20} = 35\,\%$



$$p(\bar{A} \mid F) = \frac{p(\bar{A} \cap F)}{p(F)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{7} \cong 14{,}29\,\%$$

c) On a 2 cas : i) les deux pièces sont pipées

ii) l'une est pipée et l'autre équilibrée.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & p = \dfrac{C_2^9}{C_2^{10}} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{45} \cong 35{,}56\,\% \\ \text{ii)} & p = \dfrac{C_1^9 \cdot C_1^1}{C_2^{10}} \cdot \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{15} \cong 6{,}67\,\% \end{array}\right\}$$

donc la prob. cherchee vaut $42{,}22\,\% = \frac{19}{45}$

Problème 7

a) $\ker A$: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -L_2 \\ L_3+L_2 \\ L_1+3L_2 \end{matrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{L_3-2L_2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases}$ donc

$\ker A = \{ k(2;-1;1) \mid k \in \mathbb{R} \} = \langle \overbrace{(2;-1;1)}^{\text{base du noyau}} \rangle$.

Donc $Rg(A) = 2$ et $Im(A) = \langle \underbrace{(3;-1;1),\ (2;0;1)}_{\text{base de l'image}} \rangle$

b) $\begin{vmatrix} 3-x & 2 & -4 \\ -1 & -x & 2 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-x & 2 & -4 \\ 0 & 1-x & 1-x \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} L_2+L_3$

$= \begin{vmatrix} 3-x & 2 & -6 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 1 & -2-x \end{vmatrix}_{C_3-C_2} = (1-x)\left(\underbrace{(3-x)(-2-x)}_{x^2-x-6} + 6 \right)$

$= (1-x)(x^2-x) = -x(x-1)^2$ vp : $0, 1$

$E_0 = \ker A = \langle (2;-1;1) \rangle$

$E_1 = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \{ (x;y;z) \mid x+y-2z = 0 \} = $ $\begin{matrix} y=k,\ z=\ell \\ x = 2\ell - k \end{matrix}$

$= \{ k(-1;1;0) + \ell(2;0;1) \mid k, \ell \in \mathbb{R} \}$

$= \langle (-1;1;0),\ (2;0;1) \rangle$.

On a $A = {}_B(f)_B = \underbrace{{}_B(id)_{B'}}_{P} \cdot \underbrace{{}_{B'}(f)_{B'}}_{D} \cdot \underbrace{{}_{B'}(id)_B}_{P^{-1}}$

où $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) f est une projection sur le plan $x + y - 2z = 0$ dans la direction de (d) : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

d) $A^2 = (PDP^{-1})^2 = P D^2 \cdot P^{-1} \overset{D^2 = D}{=} PDP^{-1} = A$

e) On a donc $A^n = A$ $\forall n \geq 1$ donc les vp et les espaces propres sont les mêmes que ceux de A.

Ex. 1

a) $f(x) = \dfrac{3x(x^2-2)}{x^2-3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$, $Z = \{0, \pm\sqrt{2}\}$

x		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$	
$3x$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-2	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-3	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

C'est une fonction impaire: $f(-x) = -f(x)$

AV : $\lim\limits_{x \to \pm\sqrt{3}} f(x) = \dfrac{"\pm 3\sqrt{3}"}{0} = \infty$, il y a des AV d'équation $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$.

Vu les degrés, il y a une AO :

$$\begin{array}{rr|l} 3x^3 & -\ 6x & x^2-3 \\ \hline -(3x^3 & -\ 9x) & 3x \\ \hline & 3x & \end{array}$$

L'éq de l'AO est $y = 3x$ et $\delta(x) = \dfrac{3x}{x^2-3}$

Le graphe de f coupe l'AO en $P(0;0)$.

b) $$f'(x) = \frac{\underbrace{(9x^2-6)}_{3(3x^2-2)}(x^2-3) - \underbrace{(3x^3-6x)}_{3x(x^2-2)} \cdot 2x}{(x^2-3)^2} =$$

$$= \frac{3(3x^4-11x^2+6) - 3(2x^4-4x^2)}{(x^2-3)^2} = \frac{3(\overbrace{x^4-7x^2+6}^{(x^2-6)(x^2-1)})}{(x^2-3)^2}$$

c)

x		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$\sqrt{6}$	
$3(x^2-6)$	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2-1	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x^2-3)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	min	$\nearrow$

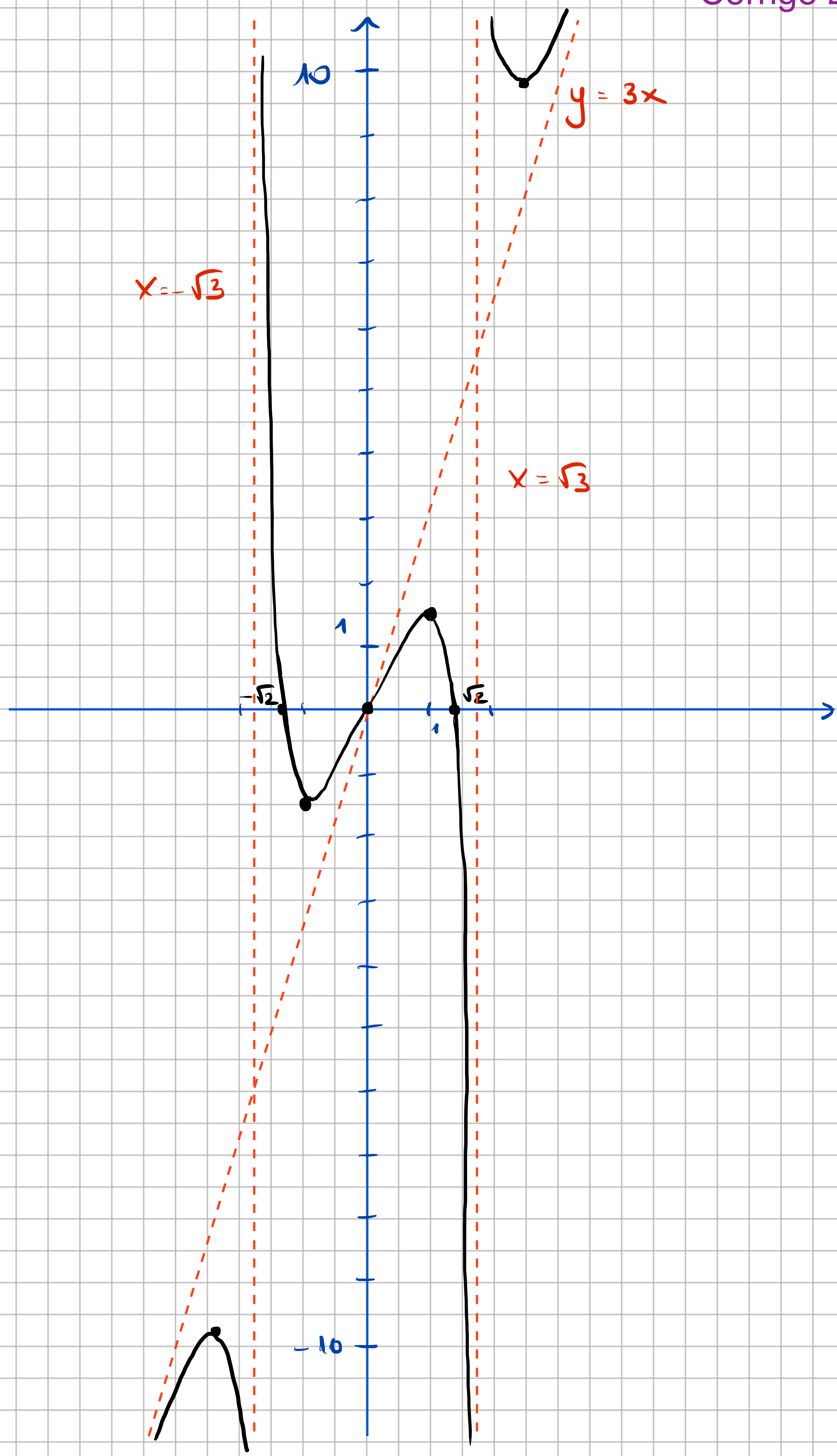
Max $(\underbrace{-\sqrt{6}}_{\cong 2,45} ; \underbrace{4\sqrt{6}}_{\cong 9,8})$

Min $(\sqrt{6} ; -4\sqrt{6})$

Min $(-1 ; -1.5)$

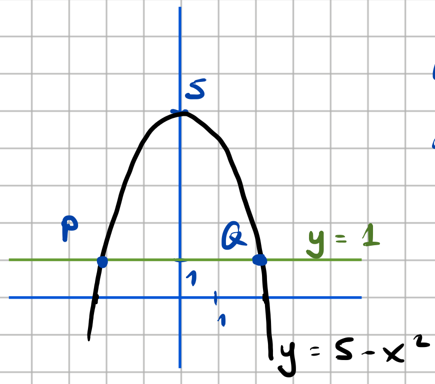
Max $(1 ; 1,5)$

d)



Ex. 2

b)



La courbe $y = 5 - x^2$ est une parabole concave de sommet $S(0;5)$.

Les points P et Q ont pour abscisses les x tels que $5 - x^2 = 1$ donc $x^2 = 4$ et $x = \pm 2$.

Ainsi $P(-2;1)$ et $Q(2;-1)$.

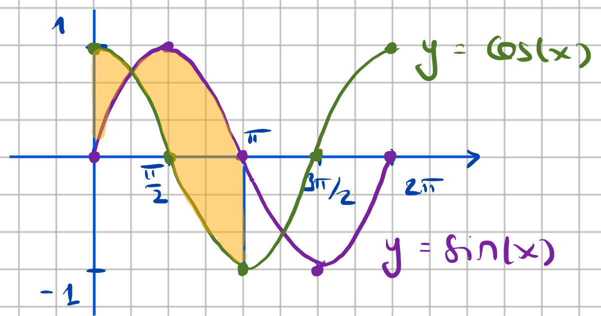
La courbe $y = 5 - x^2$ est au-dessus de $y = 1$ entre -2 et 2.

Donc $V = \pi \int_{-2}^{2} \left((5-x^2)^2 - 1 \right) dx$ (ou $2\pi \int_{0}^{2} \left((5-x^2)^2 - 1 \right) dx$)

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left(x^4 - 10x^2 + 24 \right) dx = \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 24x \right) \Big|_{-2}^{2}$$

$$= \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{80}{3} + 48 \right) \cdot 2 = \pi \cdot \frac{416}{15} \cdot 2 = \frac{832\pi}{15} \cong 174{,}25$$

a)



$\sin(x) = \cos(x) \iff$

$\tan(x) = 1 \iff$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

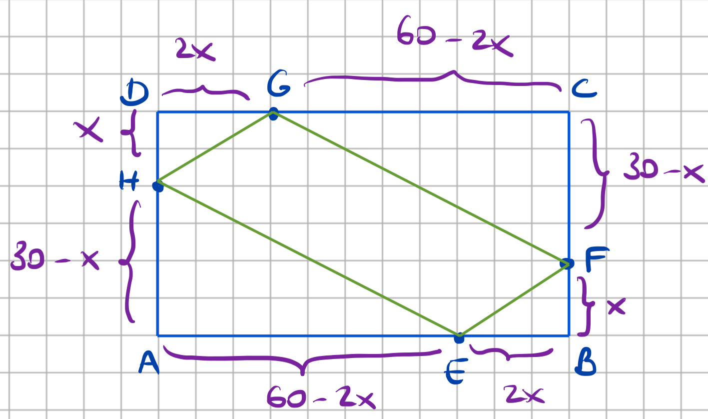
$$A = \int_{0}^{\pi/4} (\cos(x) - \sin(x))\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin(x) - \cos(x))\, dx =$$

$$= (\sin(x) + \cos(x)) \Big|_{0}^{\pi/4} + (-\cos(x) - \sin(x)) \Big|_{\pi/4}^{\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 + 1 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \cong 2{,}83.$$

Ex. 3

L'aire du parallélogramme EFGH s'obtient en enlevant à l'aire du rectangle ABCD les aires des quatre triangles rectangles.



Donc

$$f(x) = 60 \cdot 30 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x + $$
$$- 2 \cdot \frac{1}{2} (60 - 2x)(30 - x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 1800 - 2x^2 - (1800 - 120x + 2x^2)$$
$$= -4x^2 + 120x$$

Les valeurs admissibles pour x sont $[0 ; 30]$.

On a $f'(x) = -8x + 120$ qui s'annule en $x = 15$, qui est positive avant 15 et négative après.

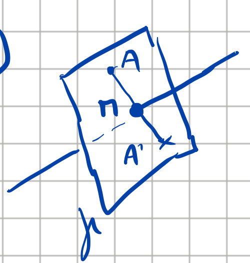
L'aire est donc maximale pour $x = 15$ et vaut alors 900.

Problème 4 (GA)

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

donc $(\beta) : 2x - y + 2z = -1$

b)



Soit μ le plan perpendiculaire à d passant par A. Alors

$(\mu) : x - y - z = -7$

$\mu \cap d : (-\lambda) - (-2+\lambda) - (3+\lambda) = -7 \Leftrightarrow$

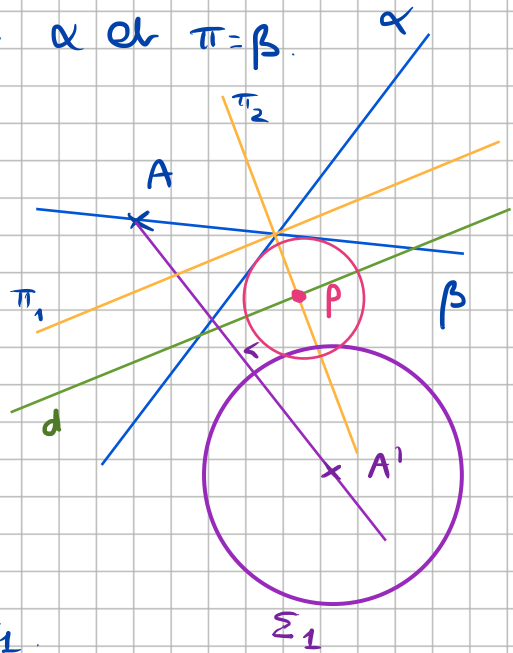
$3\lambda = 6$ donc $\lambda = 2$ et $M(-2;0;5)$

Finalement $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

donc $A'(-1;-1;7)$.

$\Rightarrow (\Sigma_1) : (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 = 16$.

c) Déterminons le plan bissecteur de α et $\pi = \beta$.



$$\frac{x + 2y - 2z - 1}{3} = \pm \frac{2x - y + 2z + 1}{3}$$

$\oplus$ $(\pi_1) : x - 3y + 4z = -2$

$\ominus$ $(\pi_2) : 3x + y = 0$

$\pi_1 \cap d : -\lambda - 3(-2+\lambda) + 4(3+\lambda) = -2$

$\Rightarrow 18 = -2$ ↯

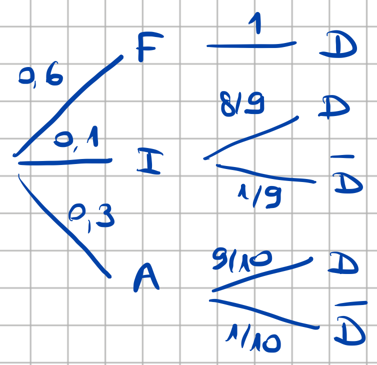
La droite d est parallèle au plan π_1.

Il n'y a donc bien qu'une sphère.

Ex 5

a) On note F = "un seul chiffre faux", I = "inversion de deux chiffres", A = "ajout ou oubli d'un chiffre"

Puis D = "le clef de contrôle detecte l'erreur".



b) $p(D) = 0{,}6 + 0{,}1 \cdot \frac{8}{9} + 0{,}3 \cdot \frac{9}{10} =$

$= \frac{863}{900} \cong 95{,}89\,\%$

c) C'est une prob. conditionnelle :

$p(F \mid D) = \frac{p(F \cap D)}{p(D)} =$

$= \frac{0{,}6 \cdot 1}{863/900} = \frac{540}{863} \cong 62{,}57\,\%$.

d) $p(D \mid \overline{A}) = \frac{p(D \cap \overline{A})}{p(\overline{A})} = \frac{0{,}6 + 0{,}1 \cdot 8/9}{0{,}6 + 0{,}1} = \frac{62}{63} \cong 98{,}41\,\%$

e) $p(8 \text{ CB détectés}) = C_8^{10} \left(\frac{863}{900}\right)^8 \cdot \left(\frac{37}{900}\right)^2 \cong 5{,}44\,\%$

f) $p(\overline{D} \text{ sur au moins un}) = 1 - p(10 \text{ CB détectés}) =$

$= 1 - \left(\frac{863}{900}\right)^{10} \cong 34{,}28\,\%$.

$\pi_2 \cap d$: $3(-\lambda) + (-2+\lambda) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -2$ donc

$\lambda = -1$ et $P(1; -3; 2)$.

$r_2 = \delta(P; \alpha) = \dfrac{|1-6-4-1|}{3} = \dfrac{10}{3}$.

Et $\|\overrightarrow{A'P}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{33} \cong 5{,}74 < r_1 + r_2$.

donc les sphères sont sécantes.

Problème 6 (AL)

a) $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 3-x & -4 & 4 \\ 2 & -3-x & 2 \\ -1 & 1 & -2-x \end{vmatrix} \underset{C_2+C_3}{=}$

$= \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 4 \\ 2 & -1-x & 2 \\ -1 & -1-x & -2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 4 \\ 2 & -1-x & 2 \\ -3 & 0 & -4-x \end{vmatrix} \underset{L_3-L_2}{=}$

$= -(1+x)\left((3-x)\cdot(-4-x) + 12\right) = -(1+x)(x^2+x)$

$= -x(x+1)^2$. Donc les vp sont -1 et 0.

b) $E_0 = \ker A$.

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -L_3 \\ L_2 \\ L_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 + L_2 \\ \\ \end{matrix}$

donc $z = -k$, $x = 4k$ et $y = 2k$. Ainsi

$E_0 = \langle \underbrace{\overset{= v_1}{(4; 2; -1)}}_{B_0} \rangle$.

E_{-1} : $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si $y = k$, $z = l$, $x = k - l$ donc

$E_{-1} = \langle \underbrace{\overset{=\underline{v}_2}{(1;1;0)}, \overset{=\underline{v}_3}{(-1;0;1)}}_{B_{-1}} \rangle$ (c'est le plan $x - y + z = 0$).

c) $A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{{}_{B_d}(\alpha)_{B_d}}$ et $\underset{\sim}{P} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

${}_{B}(id)_{B_d}$

(où $B_d = B_0 \cup B_{-1}$)

d) Si $\underline{v} \in E_0$, $A^2\underline{v} = A(A\underline{v}) = A \cdot \underline{0} = \underline{0}$.

Si $\underline{v} \in E_{-1}$, $A^2\underline{v} = A(A\underline{v}) = A(-\underline{v}) = -A\underline{v} = -(-\underline{v})$
$= \underline{v}$

donc les vp de A^2 sont 0 et 1.

A^2 est une projection sur (π) : $x - y + z = 0$

en direction de $\underline{v}_3 = (4;2;-1)$