Problème 1

On a $f(x) = \dfrac{-2x^3}{x^2-1}$ a) $ED_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $Z = \{0\}$

x		-1		0		1	
$-2x^3$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \text{"}\dfrac{-2}{0}\text{"} = \infty$, AV : $x = 1$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \text{"}\dfrac{2}{0}\text{"} = \infty$, AV : $x = -1$.

AO :

$$\begin{array}{r|l} -2x^3 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -(-2x^3+2x) & -2x \\ \cline{1-1} -2x & \end{array}$$

donc AO : $y = -2x$ et $\delta(x) = \dfrac{-2x}{x^2-1}$

x		-1		0		1	
$\delta(x)$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

b) $f'(x) = \dfrac{-6x^2(x^2-1)+2x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x^4+6x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$-2x^2$	$-$		$-$		$-$	0	$-$		$-$		$-$
x^2-3	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(x^2-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	min	↗		↗	—	↗		↗	max	↘

f' s'annule en 0 ; $\pm\sqrt{3}$

min $m(-\sqrt{3} ; \underbrace{-3\sqrt{3}}_{\cong -5{,}2})$

et max $M(\sqrt{3} ; \underbrace{3\sqrt{3}}_{\cong 5{,}2})$

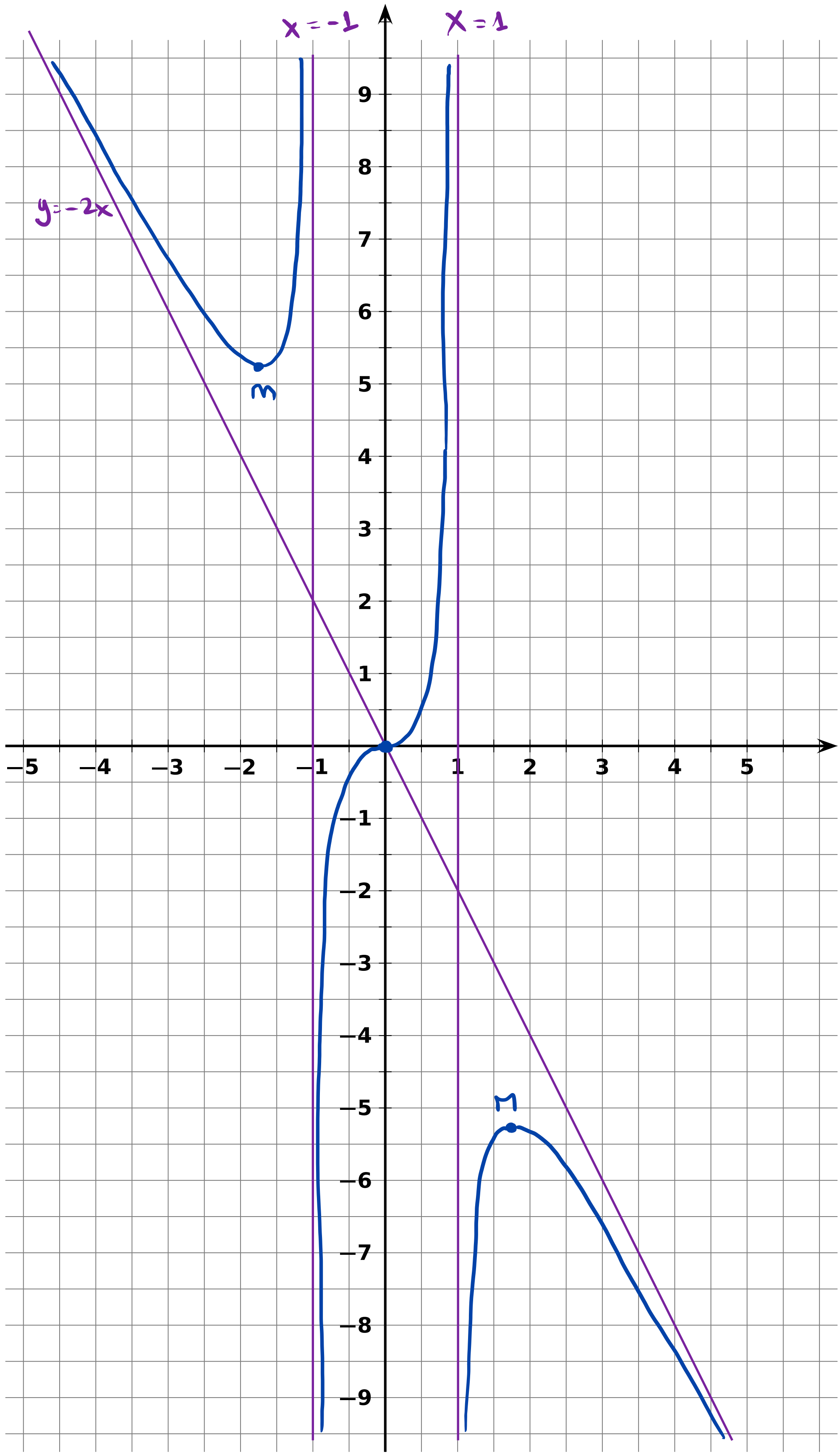
et plat $(0;0)$

c) Sur l'annexe.

d) $f(-x) = \dfrac{-2(-x)^3}{(-x)^2-1} = \dfrac{\overbrace{2x^3}^{=-(-2x^3)}}{x^2-1} = -f(x)$, donc le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine. (f est impaire)

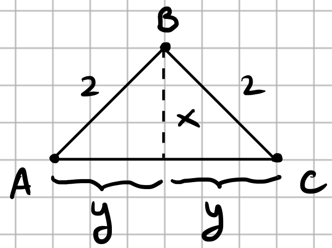
Nom, prénom :

Annexe du problème 1



Exercice 2 (optimisation)

a)



On a $x^2 + y^2 = 2^2$ donc $y = \sqrt{4 - x^2}$

donc $\delta(A;C) = 2y = 2\sqrt{4-x^2}$

b) On a $V = \mathcal{A}_{ABC} \cdot \underbrace{4}_{\text{profondeur de l'abri}} = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot x \cdot 4 = 4x\sqrt{4-x^2}$

c) Posons $f(x) = V^2(x) = 16x^2(4-x^2) = 16(4x^2 - x^4)$.

On a $VA = [0;2]$. On calcule

$$f'(x) = 16(8x - 4x^3) = 64x(2-x^2)$$ qui s'annule en $\pm\sqrt{2}$ et 0.

On a

	0		$\sqrt{2}$		2
$64x$	0	$+$		$+$	
$2-x^2$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(x) = V^2(x)$ est maximal si $x = \sqrt{2}$

d) $f(\sqrt{2}) = 16 \cdot 2 \cdot (4-2) = 64$ donc le volume maximal est $\sqrt{64} = 8\,m^2$.

Problème 3

A. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$. $ED_f =]0;+\infty[\setminus \{1\}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \overset{BH}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1/x}{1} = 1$, il y a un trou en $(1;1)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \text{"}\dfrac{-\infty}{-1}\text{"} = \infty$, AV en $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty} \overset{BH}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$, AH : $y = 0$ à droite.

B. i) On a $e^{2x-6} = e^{-x} \Leftrightarrow 2x - 6 = -x \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

donc $A(2; e^{-2})$

ii) $A = \displaystyle\int_0^2 \underbrace{(e^{-x} - e^{2x-6})}_{\text{la fct } g \text{ est décroissante, donc c'est elle qui est au-dessus sur le schéma}} dx = \left(-e^{-x} - \frac{1}{2} e^{2x-6}\right)\Big|_0^2$

$= -e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-2} + e^{0} + \frac{1}{2} e^{-6} = -\frac{3}{2} e^{-2} + 1 + \frac{1}{2} e^{-6}$

$\cong 0{,}798$

C. On a $f'(x) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ et $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$

donc $(t): y = -2x + h$.

Comme $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on a $0 = \frac{-2\pi}{3} + h$ donc $h = \frac{2\pi}{3}$

et $(t): y = -2x + \frac{2\pi}{3}$.

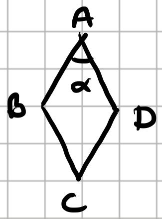
Problème 4

a) On a $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{\|\vec{d_1}\|\cdot\|\vec{d_2}\|} = \dfrac{4+11}{\sqrt{125}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}$

$\vec{d_1}$ = vect. directeur de $d_{AB} = \begin{pmatrix}-2\\11\end{pmatrix}$

d_2 = " " " $d_{AD} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

donc $\alpha \cong 53,13°$.



on a

$\widehat{BCD} \cong 53,13°$ et $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \dfrac{360° - 2\cdot 53,13°}{2} \cong 126,87°$

b) On résout $\dfrac{11x+2y-78}{\underbrace{\sqrt{125}}_{=5\sqrt{5}}} = \pm\dfrac{x+2y+2}{\sqrt{5}} \quad \Big|\cdot 5\sqrt{5}$

$11x + 2y - 78 = \pm 5(x+2y+2)$ $\xrightarrow{+}$ $6x - 8y - 88 = 0$

$\xrightarrow{-}$ $16x + 12y - 68 = 0$.

Donc (b_1) : $3x - 4y = 44$ et (b_2) : $4x + 3y = 17$

c) Le centre est sur la bissectrice intérieur de $\widehat{BAD}$

sa pente est négative vu la figure.

Donc c'est b_2.

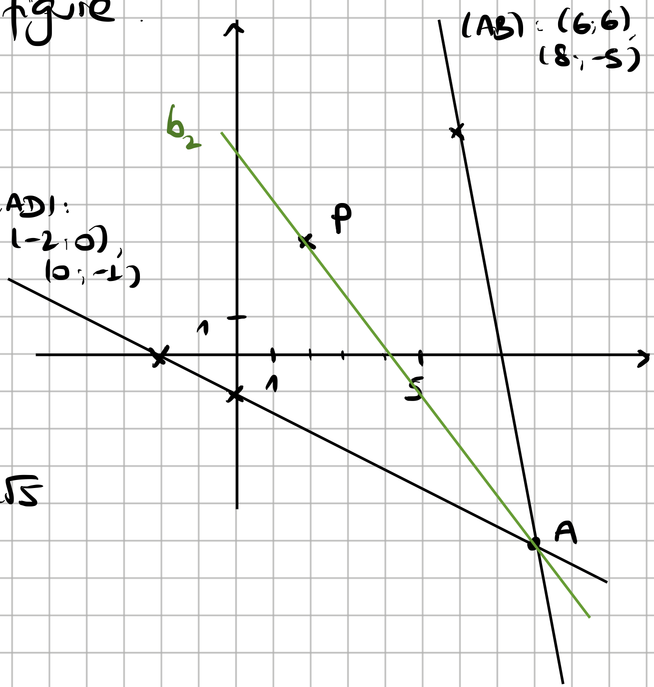
Comme $x_P = 2$, $y_P = 3$

donc le centre du cercle est $P(2;3)$.

On a $\delta(P;(AD)) =$

$= \dfrac{|2 + 2\cdot 3 + 2|}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\cdot\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

et (Γ) : $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 20$



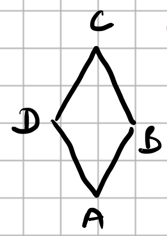
d) A : $\begin{cases} 11x + 2y = 78 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$ donc $10x = 80$, $x = 8$ et $y = -5$

$\Rightarrow A(8;-5)$

On a $\vec{OC} = \vec{OA} + 2\vec{AP} = \begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\11\end{pmatrix}$

donc $C(-4;11)$.

Corrige 2025
3Ms



e) BC // AD et passe par C

donc (BC) : $x + 2y = 18$

De même, CD // BA et passe par C

donc (CD) : $11x + 2y = -22$.

Problème 5 (probabilités)

A. a) $\underbrace{3!}_{\text{ordre des disciplines}} \cdot 24! \cdot 19! \cdot 7! \cong 2,28235 \cdot 10^{45}$ possibilités.

b) Il n'y a donc qu'une discipline qui a 3 enseignants et les autres en ont 2. Donc :

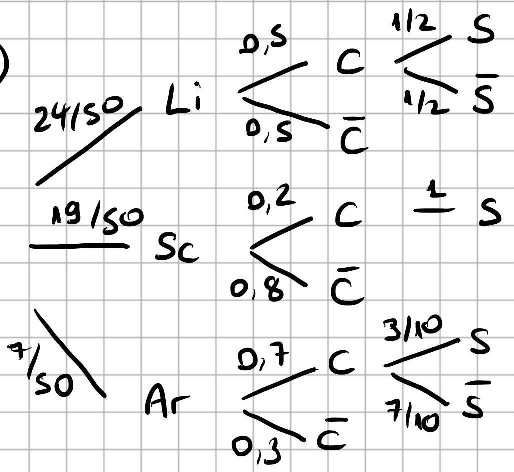
$$\underbrace{C_3^{24} \cdot C_2^{19} \cdot C_2^{7}}_{\text{3 ens. de littérature}} + \underbrace{C_2^{24} \cdot C_3^{19} \cdot C_2^{7}}_{\text{3 de sciences}} + C_2^{24} \cdot C_2^{19} \cdot C_3^{7} =$$

$= 7'268'184 + 5'616'324 + 1'651'860 = 14'536'368.$

c) i) Il y a 5 couleurs, donc $5^3 = 125$ possibilités.

ii) Cela donc $A_3^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ possibilités

B. d)



Nombre d'enseignants

$n = 24 + 19 + 7 = 50$

e) $p(S) = \frac{24}{50} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} +$

$+ \frac{19}{50} \cdot 0,2 + \frac{7}{50} \cdot 0,7 \cdot \frac{3}{10} =$

$= \frac{1127}{5000} = 22,54\%$

f) $p(Li \mid S) = \frac{p(Li \cap S)}{p(S)} = \frac{\frac{24}{50} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{0,2254} = \frac{600}{1127} \cong 53,24\%$

Problème 1

$f(x) = \dfrac{-x^2+4x+5}{x+3}$, $ED = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $\underbrace{x^2-4x-5}_{(x-5)(x+1)} = 0$

donc $Z = \{-1 ; 5\}$

		-3		-1		5	
$-x^2+4x+5$	−		−	0	+	0	−
$x+3$	−	0	+		+		+
$f(x)$	+	‖	−	0	+	0	−

AV : $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \dfrac{"-16"}{0} = \infty$ donc il y a une AV d'éq. $x=-3$.

AO :

	-1	4	5
-3		3	-21
	-1	7	-16

Il y a une AO d'éq. $y = -x+7$

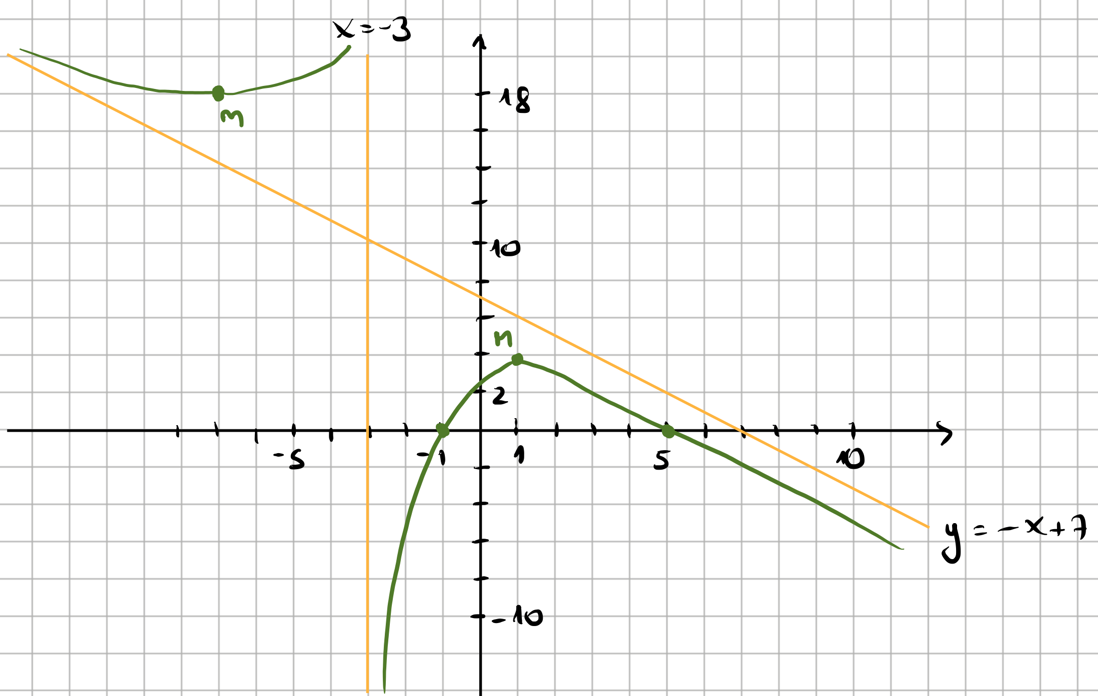
et $\delta(x) = \dfrac{-16}{x+3}$ donc pas de croisement.

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(-2x+4)(x+3)}^{-2x^2-2x+12} - (-x^2+4x+5)}{(x+3)^2} = \frac{-x^2-6x+7}{(x+3)^2}$$

$x^2+6x-7 = (x+7)(x-1)$ donc $Z_{f'} = \{-7 ; 1\}$.

		-7		-3		1	
$-x^2-6x+7$	−	0	+		+	0	−
$(x+3)^2$	+		+	0	+		+
$f'(x)$	−	0	+	‖	+	0	−
$f(x)$	↘	min	↗		↗	max	↘

Il y a un minimum $m\left(-7 ; \underbrace{\dfrac{-49-28+5}{-4}}_{18}\right)$ et un maximum en $M(1;2)$.



Problème 2

a) $B(x) = \underbrace{2+4}_{\text{carrés des bords}} + \underbrace{x \cdot 1}_{\text{bord haut}} + \underbrace{2y}_{\text{bords latéraux}} + \underbrace{2x}_{\text{bord bas}} = 3x + 6 + 2y$

Contrainte : $x \cdot y = 54$ donc $y = \frac{54}{x}$.

Ainsi $B(x) = 3x + 6 + \frac{108}{x}$.

b) On cherche x tel que $B(x)$ est minimal. On calcule

$$B'(x) = 3 - \frac{108}{x^2} = \frac{3x^2 - 108}{x^2} = \frac{3(x^2-36)}{x^2}$$

Valeurs admissibles pour x : $x > 0$.

x	0		6	
$x^2 - 36$		$-$		$+$
x^2	0	$+$		$+$
$B'(x)$		$-$		$+$
$B(x)$		↘		↗

$B(x)$ est minimal pour $x = 6$ et, dans ce cas, la surface de la tablette vaut $(6+2)(9+3) = 96 \text{ cm}^2$.

Problème 3

a) $(\Gamma) : (x-2)^2 + (y-1)^2 = \underbrace{85+4+1}_{=90}$ donc $\Omega(2;1)$

et $r = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

b) On a $9 \cdot 7 - 13 \cdot 16 + 145 = 0$ donc $A \in c$ et

$$\delta(\Omega ; c) = \frac{|9 \cdot 2 - 13 \cdot 1 + 145|}{\sqrt{9^2 + (-13)^2}} = \frac{150}{\underbrace{\sqrt{250}}_{=5\sqrt{10}}} = \frac{30 \cdot \sqrt{10}}{10} =$$

$= 3\sqrt{10} = r$ donc c est tg. à Γ.

c) Posons $(t) : y = mx + h$. On a $16 = 7m + h$ et

$$3\sqrt{10} = \delta(t ; \Omega) = \frac{|2m - 1 + h|}{\sqrt{m^2+1}} \quad \text{donc}$$

$$90(m^2+1) = \underbrace{(2m - 1 + 16 - 7m)^2}_{= (-5m+15)^2 = 25 \cdot (m-3)^2} \qquad |:5$$

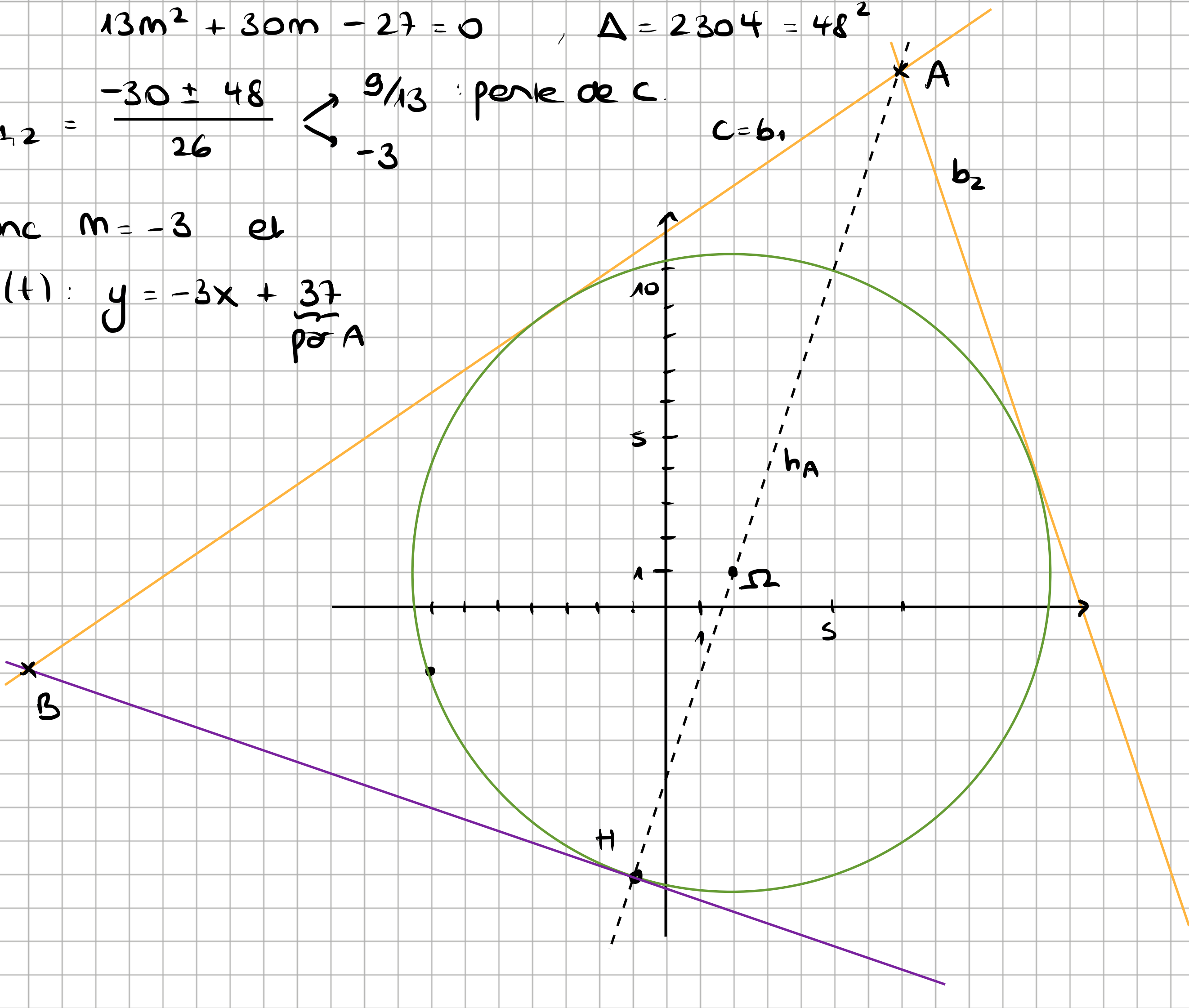
donc $18m^2 + 18 = 5(m^2 - 6m + 9)$

$13m^2 + 30m - 27 = 0$, $\Delta = 2304 = 48^2$

$m_{1,2} = \dfrac{-30 \pm 48}{26}$ < $9/13$: pente de c. ; -3

Donc $m = -3$ et

$(t) : y = -3x + \underbrace{37}_{\text{par } A}$



d) Comme le triangle ABC est isocèle en A, sa hauteur h_A coïncide avec sa bissectrice issue de A, donc h_A passe par $\Omega(2;1)$ et $A(7;16)$. Donc $h_A = (\Omega A)$.

On a $\overrightarrow{\Omega A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $(h_A) : 3x - y = 5$

Ainsi $H \in \Gamma \cap h_A$: $x^2 + (3x-5)^2 - 4x - 2(3x-5) - 85 = 0$.

Donc $10x^2 - 40x - 50 = 0 \iff \underbrace{x^2 - 4x - 5}_{(x-5)(x+1)} = 0$

Comme $x < 0$, on a $x = -1$, donc $y = -3 - 5 = -8$. Donc $H(-1;-8)$.

e) La droite (BC) est perpendiculaire à h_A et passe par H, donc $(BC) : x + 3y = -25$.

$B \in (BC) \cap (c)$: $\begin{cases} x + 3y = -25 \\ 9x - 13y = -145 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y = -25 \\ -40y = 80 \end{cases}$

donc $y = -2$ et $x = -19$. Ainsi $B(-19;-2)$.

$C \in (BC) \cap (b_2)$: $\begin{cases} x + 3y = -25 \\ y = -3x + 37 \end{cases}$ donc $x - 9x + 111 = -25$

$\Rightarrow -8x = -136$ et $x = 17$, $y = -14$. Ainsi $C(17;-14)$.

Probleme 4

A a) $f(2) = 2 + \frac{2}{-2} = 1$ et $g(2) = (\underbrace{2 \cdot 2 - 3}_{=1})^3 = 1$

donc $P \in Gr(f)$ et $P \in Gr(g)$.

b) $f'(x) = \frac{-2}{(x-4)^2}$, $f'(2) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} = m_1$

$g'(x) = 3(2x-3)^2 \cdot 2 = 6 \cdot (2x-3)^2$, $g'(2) = 6 = m_2$.

$\tan(\alpha) = \frac{6 - (-\frac{1}{2})}{1 + 6 \cdot (-\frac{1}{2})} = -\frac{13}{4}$ donc $\alpha \cong 72,90°$.

c) $A = \int_2^3 \left(2 + \frac{2}{x-4}\right) dx = \left(2x + 2\ln(|x-4|)\right)\Big|_2^3 =$

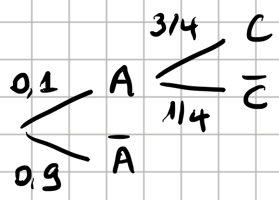
$= 6 + 2 \cdot \underbrace{\ln(1)}_{=0} - (4 + 2\ln(2)) = 2 - 2\ln(2) \cong 0,61.$

B $V = \pi \int_3^4 e^{2x-6} dx = \frac{\pi}{2} e^{2x-6} \Big|_3^4 = \frac{\pi}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^0$

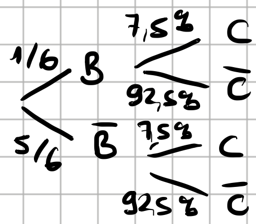
$= \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) \cong 20,07$

Problème 5

a) A = "il y a un contrôleur", C = "Christian se fait contrôler".
B = "Christian prend un billet".



donc $p(C) = 0{,}1 \cdot \frac{3}{4} = 0{,}075 = 7{,}5\%$



b) $p(\bar{B} \cap \bar{C}) = \frac{5}{6} \cdot (100\% - 7{,}5\%) \cong 77{,}08\%$

c) $p(\bar{B} \cap C \mid \text{dé pair}) = \dfrac{p(\bar{B} \cap C \cap \text{dé pair})}{p(\text{dé pair})} = \dfrac{\frac{3}{40} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{1/2} =$

$= \frac{2}{3} \cdot 7{,}5\% = 5\%.$

d) $p(\leq \text{deux contrôles}) = \underbrace{P(0C)}_{=B(0;\,30;\,\underbrace{\frac{3}{40}}_{=7{,}5\%})} + \overbrace{P(1C)}^{=B(1;\,30;\,\frac{3}{40})} + \underbrace{P(2C)}_{=B(2;\,30;\,\frac{3}{40})} =$

$= \left(\frac{37}{40}\right)^{30} + C_1^{30} \cdot \frac{3}{40} \cdot \left(\frac{37}{40}\right)^{29} + C_2^{30} \cdot \left(\frac{3}{40}\right)^2 \cdot \left(\frac{37}{40}\right)^{28} \cong 60{,}68\%$

e) On cherche n tel que $P(\text{au moins un } C) > 80\%$

donc $1 - \underbrace{P(\text{aucun contrôle})}_{\left(\frac{37}{40}\right)^n} > 0{,}8 \iff \left(\frac{37}{40}\right)^n < 0{,}2$

$\iff n \cdot \underbrace{\log(37/40)}_{<0} < \log(0{,}2) \iff n > \dfrac{\log(0{,}2)}{\log(37/40)} \cong 20{,}6$

Il doit donc prendre le train au moins 21 fois.

Problème 1

$$f(x) = \frac{2x^2 - 12x + 18}{x^2 + 2x - 3}$$

a) • D_f : $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$

• zéros : $2(x^2 - 6x + 9) = 2(x-3)^2$, $Z = \{3\}$

		-3		1		3	
$2(x-3)^2$	+		+		+	0	+
x^2+2x-3	+	0	−	0	+		+
$f(x)$	+	‖	−	‖	+	0	+

b) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \text{"}\frac{72}{0}\text{"} = \infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \text{"}\frac{8}{0}\text{"} = \infty$ donc

il y a des AV d'équation $x = -3$ et $x = 1$.

• $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ AH d'équation $y = 2$. On résout

$f(x) = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 2x^2 + 4x - 6 \Leftrightarrow 16x = 24$.

$\Leftrightarrow x = 3/2$.

Intersection Graphe – AH : $P(\frac{3}{2}; 2)$.

c) $$f'(x) = \frac{(4x-12)(x^2+2x-3) - 2(x^2-6x+9)\cdot\overbrace{(2x+2)}^{2(x+1)}}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$= \frac{4(x-3)(x^2+2x-3 - \overbrace{(x-3)(x+1)}^{x^2-2x-3})}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{16x(x-3)}{(x^2+2x-3)^2}$$

		-3		0		1		3	
$16x(x-3)$	+		+	0	−		−	0	+
$(x^2+2x-3)^2$	+	0	+		+	0	+		+
$f'(x)$	+	‖	+	0	−	‖	−	0	+
$f(x)$	↗		↗	max	↘		↘	min	↗

Max $(0; -6)$

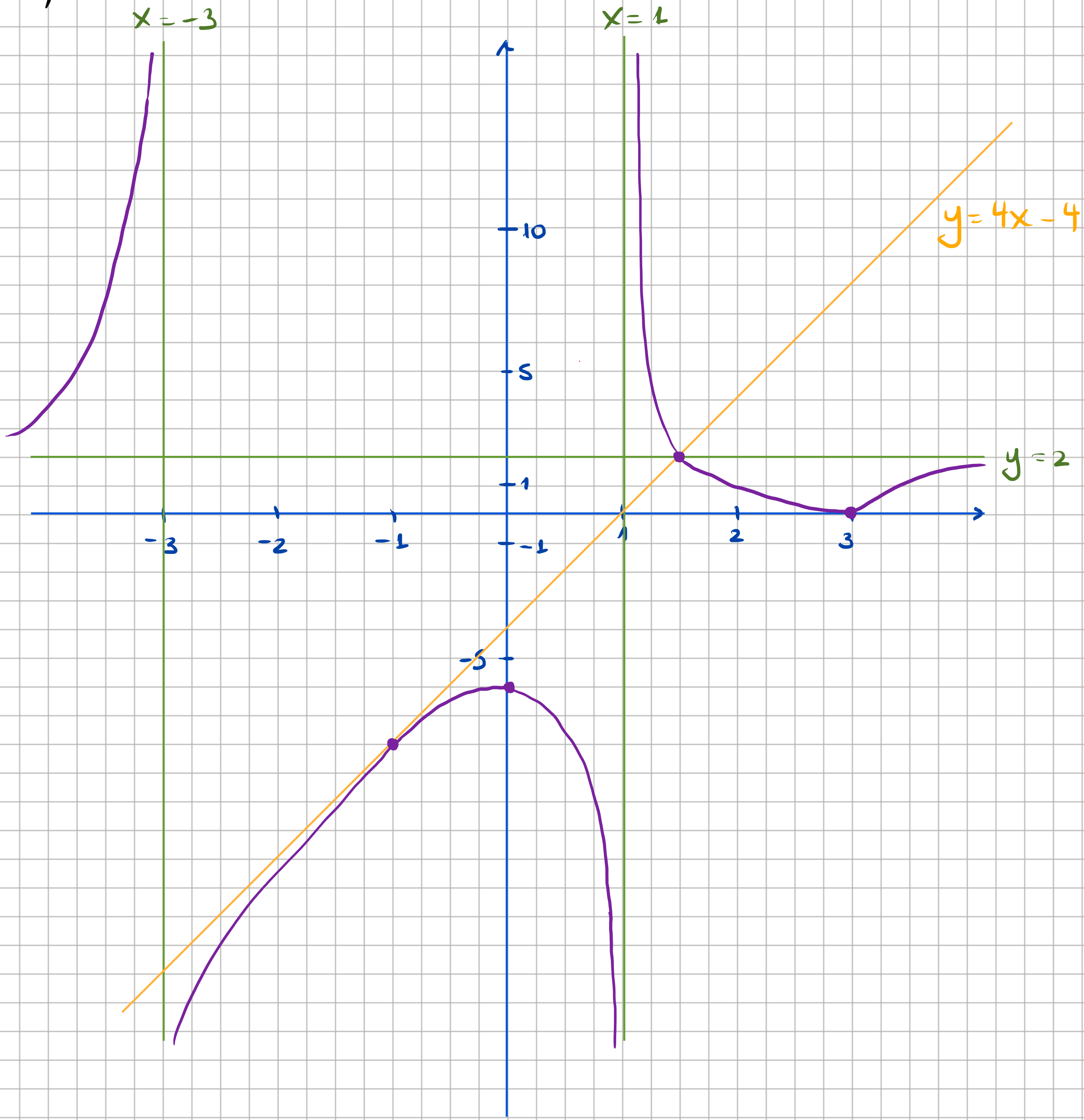
Min $(3; 0)$

e) On a $f'(-1) = \frac{-16\cdot(-4)}{(-4)^2} = 4$ donc $y = 4x + h$

et $f(-1) = \frac{2+12+18}{1-2-3} = -8 \Rightarrow h = -8 + 4 = -4$

donc (t): $y = 4x - 4$.

d)



Problème 2

Surface : $12xy + \underbrace{(16-4x)(5-4y)}_{80-20x-64y+16xy} =$

$= 28xy + 80 - 20x - 64y$.

Contrainte : $12xy = 15$ donc $y = \frac{5}{4x}$.

On remplace y par $\frac{5}{4x}$:

$\Rightarrow f(x) = 35 + 80 - 20x - \frac{80}{x} = 115 - 20x - \frac{80}{x}$

Donc $f'(x) = -20 + \frac{80}{x^2} = \frac{80 - 20x^2}{x^2} = \frac{20(4-x^2)}{x^2}$

Valeurs admissibles : $0 \leq x \leq 4$

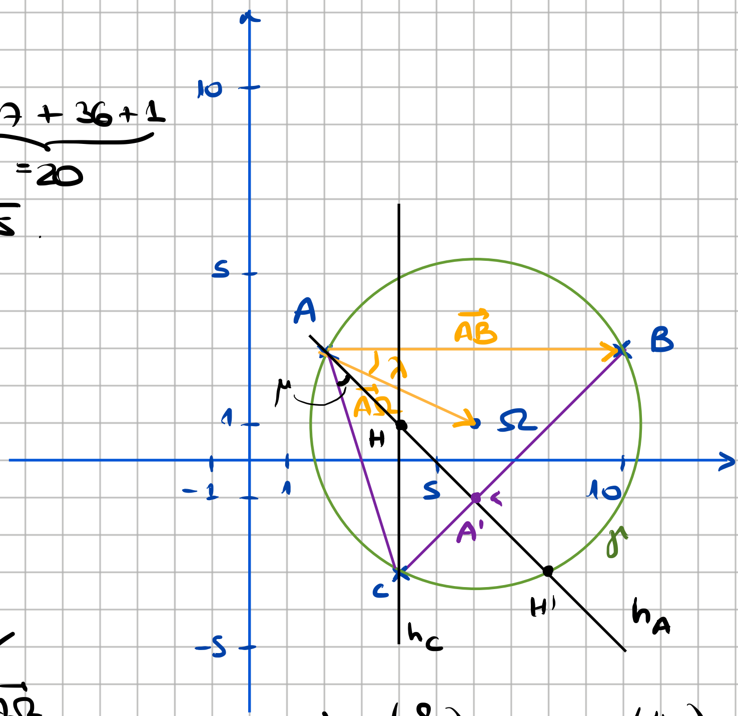
donc $x = 2m$, et $y = \frac{5}{8} = 0{,}625$

x	0		2		4
$20(4-x^2)$		+	0	−	
x^2	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

Probleme 3

a) $(x-6)^2+(y-1)^2 = \underbrace{-17+36+1}_{=20}$

$\Omega(6;1)$, $r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.



b) On vérifie que

$A, B, C \in \gamma$.

A: $(-4)^2+2^2=20$ ✓

B: $4^2+2^2=20$ ✓

C: $(-2)^2+(-4)^2=20$ ✓

c) On a $\cos(\lambda)=\dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{A\Omega}}{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{A\Omega}\|}$ et $\vec{AB}=\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$, $\vec{A\Omega}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

donc $\cos(\lambda)=\dfrac{32}{8\cdot\sqrt{20}}=\dfrac{4}{\sqrt{20}} \Rightarrow \lambda \cong 26,57°$.

d) $\vec{BC}=\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ donc (h_A): $x+y=5$

A': $\begin{cases} x+y=5 \\ \underbrace{x-y=7}_{d_{BC}} \end{cases}$ donc $x=6$ et $y=-1 \Rightarrow A'(6;-1)$.

e) Déterminons $\underbrace{(h_C)}_{\text{verticale}}$: $x=4$ donc $H(4;\underbrace{1}_{\text{sur } h_A})$

f) H': $(x-6)^2+(\overbrace{5-x-1}^{4-x})^2=20 \Leftrightarrow$

$x^2-12x+36+16-8x+x^2=20 \Leftrightarrow$

$2x^2-20x+32=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-10x+16}_{(x-8)(x-2)}=0$

$A(2;3)$ et $H'(8;-3)$

$H(4;1)$, $H'(8;-3)$, $M_{HH'}(6;-1)=A'$.

Problème 4

a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x} = "\frac{0}{0}" \overset{BH}{=} \lim_{x \to 0} \frac{3e^{3x}}{2} = \frac{3}{2}$ et

$\lim_{x \to 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x - 3} = "\frac{0}{0}" \overset{BH}{=} \lim_{x \to 3} \frac{2x / (x^2 - 8)}{1} =$

$= \lim_{x \to 3} \frac{2x}{x^2 - 8} = \frac{6}{1} = 6$.

b) On résout $x^2 + 4x + 2 = 5x + 4 \Leftrightarrow$

$\underbrace{x^2 - x - 2}_{(x-2)(x+1)} = 0$ donc les courbes se croisent en $x = -1$ et en $x = 2$

De plus $x^2 - x - 2 < 0$ entre -1 et 2 donc

$x^2 + 4x + 2 < 5x + 4$ entre -1 et 2.

$\Rightarrow A = \int_{-1}^{2} (5x + 4 - (x^2 + 4x + 2))\, dx =$

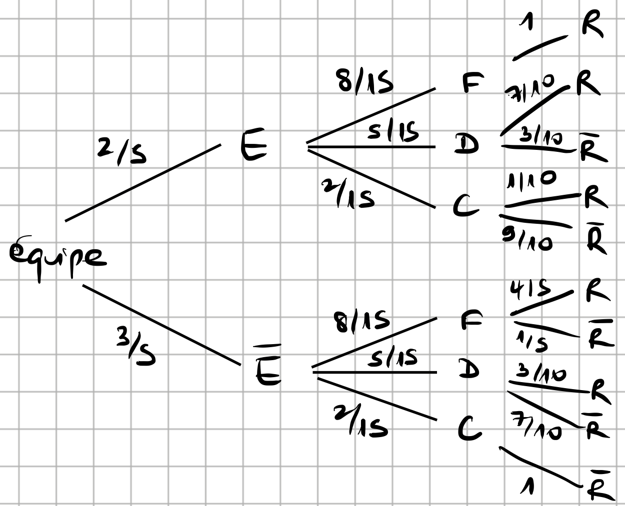
$= \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\, dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_{-1}^{2} =$

$= -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}$.

Problème 5

Posons E = "joueur experimenté", F = "niveau facile", D = "niveau difficile", C = "niveau cauchemardesque" et R = "réussir".

a)



b) $p(R) = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{8}{15} + \frac{5}{15} \cdot \frac{7}{10} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{10} \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{8}{15} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{15} \cdot \frac{3}{10} \right)$

$= \frac{157}{250} = 62,8\%$.

c) $p(R \mid C) = \frac{p(R \cap C)}{p(C)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \cancel{\frac{2}{15}} \cdot \frac{1}{10}}{\cancel{\frac{2}{15}}} = \frac{1}{25} = 0,04 = 4\%$.

d) $p(\bar{E} \mid \bar{R}) = \frac{p(\bar{E} \cap \bar{R})}{p(\bar{R})} = \frac{\frac{3}{5}\left(\frac{8}{15} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{15} \cdot \frac{7}{10} + \frac{2}{15} \right)}{1 - 0,628} =$

$= \frac{71}{93} \cong 76,34\%$.

e) $B(10; 7; 0,628) = C^{10}_{7} \cdot 0,628^{7} \cdot 0,372^{3} \cong 23,80\%$.

f) $1 - B(10; 0; 0,628) = 1 - 0,372^{10} \cong 99,99\%$

Problème 1

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{4x^2+5x}$$

D_f : $4x^2+5x = x(4x+5) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -\frac{5}{4}$

donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5/4\,;\,0\}$

$Z_f = \emptyset$,

		$-5/4$		0	
$f(x)$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$

car $e^{3x} > 0$ pour tout x.

AV : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \text{"}\frac{1}{0}\text{"} = \infty$ et $\lim\limits_{x\to -5/4} \text{"}\frac{e^{-15/4}}{0}\text{"} = \infty$

donc il y a des AV en $x = 0$ et $x = -\frac{5}{4}$.

AH : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \text{"}\frac{0}{\infty}\text{"} = 0$ donc il y a une AH à gauche d'équation $y = 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \overset{BH}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3e^{3x}}{8x+5} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \overset{BH}{=}$

$= \lim\limits_{x\to \infty} \frac{9e^{3x}}{8} = \infty$ donc pas d'AH à droite.

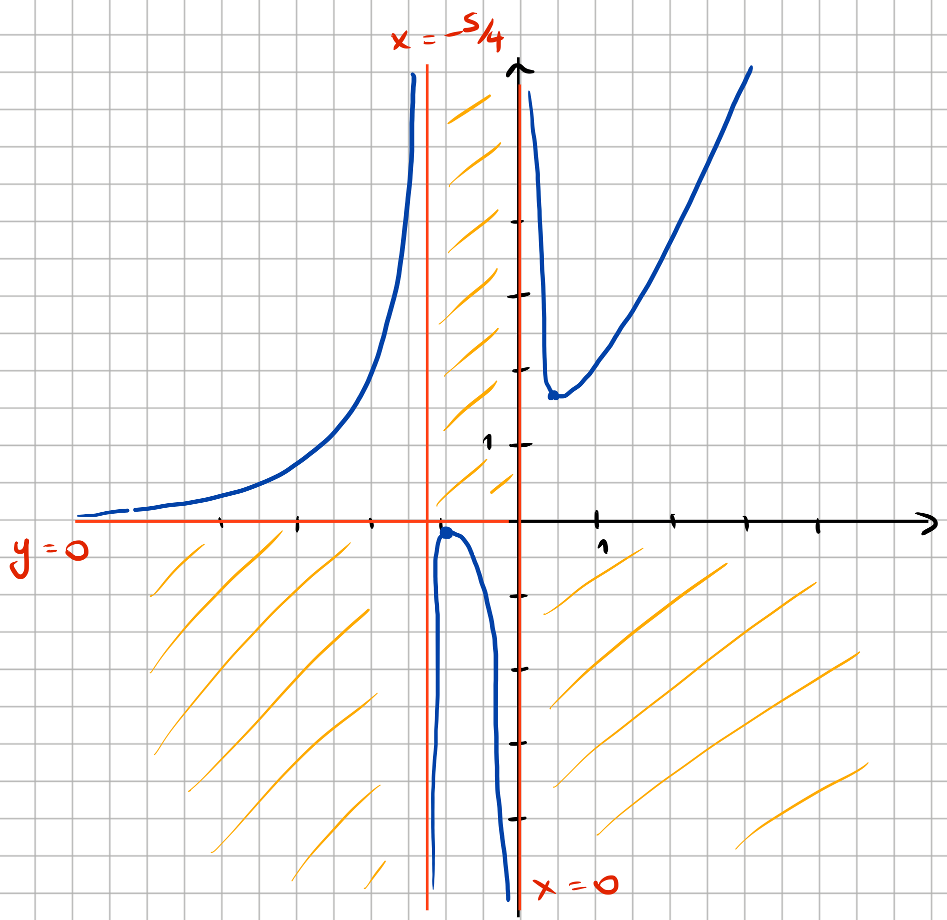
$$f'(x) = \frac{3e^{3x}(4x^2+5x) - e^{3x}(8x+5)}{(4x^2+5x)^2} =$$

$$= \frac{e^{3x}(12x^2+15x-8x-5)}{(4x^2+5x)^2} = \frac{e^{3x}(12x^2+7x-5)}{(4x^2+5x)^2}$$

zéros de f' : $\Delta = 49 + 240 = 289$, $x_{1,2} = \frac{-7 \pm 17}{24}$ $\nearrow 5/12$, $\searrow -1$

		$-5/4$		-1		0		$5/12$	
e^{3x}	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$12x^2+7x-5$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$(4x^2+5x)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	min	$\nearrow$

On a un maximum en $M(-1\,;\,-0{,}05)$ et un minimum en $m(5/12\,;\,1{,}26)$.
$\approx 0{,}42$



Problème 2

a) $V = \text{base} \cdot \text{hauteur} = (24-4)\left(\frac{45}{2} - 2\right) \cdot 2 = 820$

b) $V(x) = (24-2x) \cdot \left(\frac{45}{2} - x\right) \cdot x = (540 - 45x - 24x + 2x^2)x$

$= 2x^3 - 69x^2 + 540x$

c) On calcule $V'(x) = 6x^2 - 138x + 540 =$

$= 6(\underbrace{x^2 - 23x + 90}) = 0$

$\Delta = 169, \; x_{1,2} = \frac{23 \pm 13}{2}$ ↗ 18, ↘ 5

et x doit être ≤ 12 donc $x = 18$ n'est pas admissible

Valeurs admissibles : $0 \leq x \leq 12$

$V(x)$ est maximum si $x = 5$ cm.

		x_2		10	x_1
$V'(x)$	$+$	0	$-$		
$V(x)$	↗	max	↘		

Problème 3

a) $f(x) = x + \frac{5}{x} > 0$ si $x > 0$

On a $f(x) = 6 \iff x^2 + 5 = 6x \iff \underbrace{x^2 - 6x + 5}_{(x-5)(x-1)} = 0$

On a $f(2) = \frac{9}{2} < 6$ donc

$$A = \int_1^5 (6 - x - \frac{5}{x})\,dx = 6x - \frac{1}{2}x^2 - 5\ln(|x|)\Big|_1^5$$

$$= 30 - \frac{25}{2} - 5\ln(5) - 6 + \frac{1}{2} = 12 - 5\ln(5) \cong 3{,}95$$

b) $$V = \pi \int_1^2 \underbrace{(x + \frac{5}{x})^2}_{x^2 + 10 + \frac{5^2}{x^2}}\,dx = \pi \int_1^2 (x^2 + 10 + \frac{25}{x^2})\,dx$$

$$= \pi\left(\frac{1}{3}x^3 + 10x - \frac{25}{x}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \pi\left(\frac{8}{3} + 20 - \frac{25}{2} - \frac{1}{3} - 10 + 25\right) = \frac{149\pi}{6}.$$

$(\cong 78{,}02)$

c) L'équation de l'AO est $y = x$

(Avec une division ordinaire, $f(x) = \frac{x^2+5}{x}$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5 & x \\ \hline -x^2 & x \\ \hline 5 & \end{array}$$

donc $y = x$)

Problème 4

a) On a $\frac{\ln(1)}{1} = 0$ et $\frac{1}{1} - 1 = 0$ donc les deux courbes se coupent en $(1;0)$.

De plus, $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{1/x \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

qui vaut 1 si $x=1$ et $\left(\frac{1}{x} - 1\right)' = -\frac{1}{x^2}$ qui vaut -1 si $x=1$. Donc les deux courbes se coupent bien à angle droit en $(1;0)$.

b) $\Gamma_1 : (x-3)^2 + (y-5)^2 = \underbrace{2+9+25}_{36}$

donc $C_1(3;5)$, $r_1 = 6$

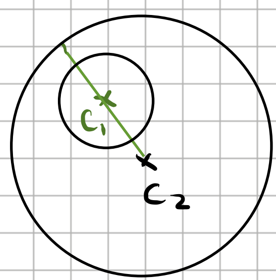
$\Gamma_2 : (x-5)^2 + (y-8)^2 = 2^2$, $C_2(5;8)$ et $r_2 = 2$

$\overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \cong 3,6$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{C_1C_2}\| < \overbrace{r_1 - r_2}^{=4}$ donc

C_2 est intérieur à C_1

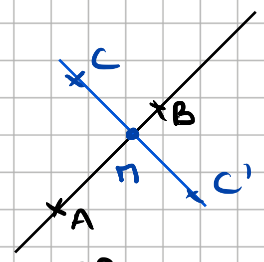
↳ ils sont donc disjoints.



Problème 5

a) $C(-4;0)$ $r = \sqrt{800} = 10\cdot\sqrt{8} = 20\cdot\sqrt{2}$

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $d_{AB}: x + 7y = 196$



$d_{CC'}: 7x - y = -28$

$M: \begin{cases} x + 7y = 196 \\ 7x - y = -28 \end{cases}$ $50x = 0$, $x = 0$, $y = 28$

donc $M(0;28)$ et $\vec{OC'} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\underbrace{\vec{CM}}_{\begin{pmatrix} 4 \\ 28 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 56 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C'(4;56)$

c) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{CM}\| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt{4^2+28^2} = 100$

d) On a $\|\vec{CA}\| = \left\|\begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1250} \cong 40,6 > 28,3 \cong \sqrt{800}$.

Posons $(t): y = mx + h$, $A \in t$: $h = 25 - 21m$

et $\sqrt{800} = \delta(C;t) = \dfrac{|-4m + h|}{\sqrt{m^2+1}}$ $\Leftrightarrow$

$\underbrace{(-4m + 25 - 21m)^2}_{25^2(1-m)^2} = 800(m^2+1)$

$625(1 - 2m + m^2) = 800(m^2+1)$ $|:25$

$25(1 - 2m + m^2) = 32(m^2+1)$

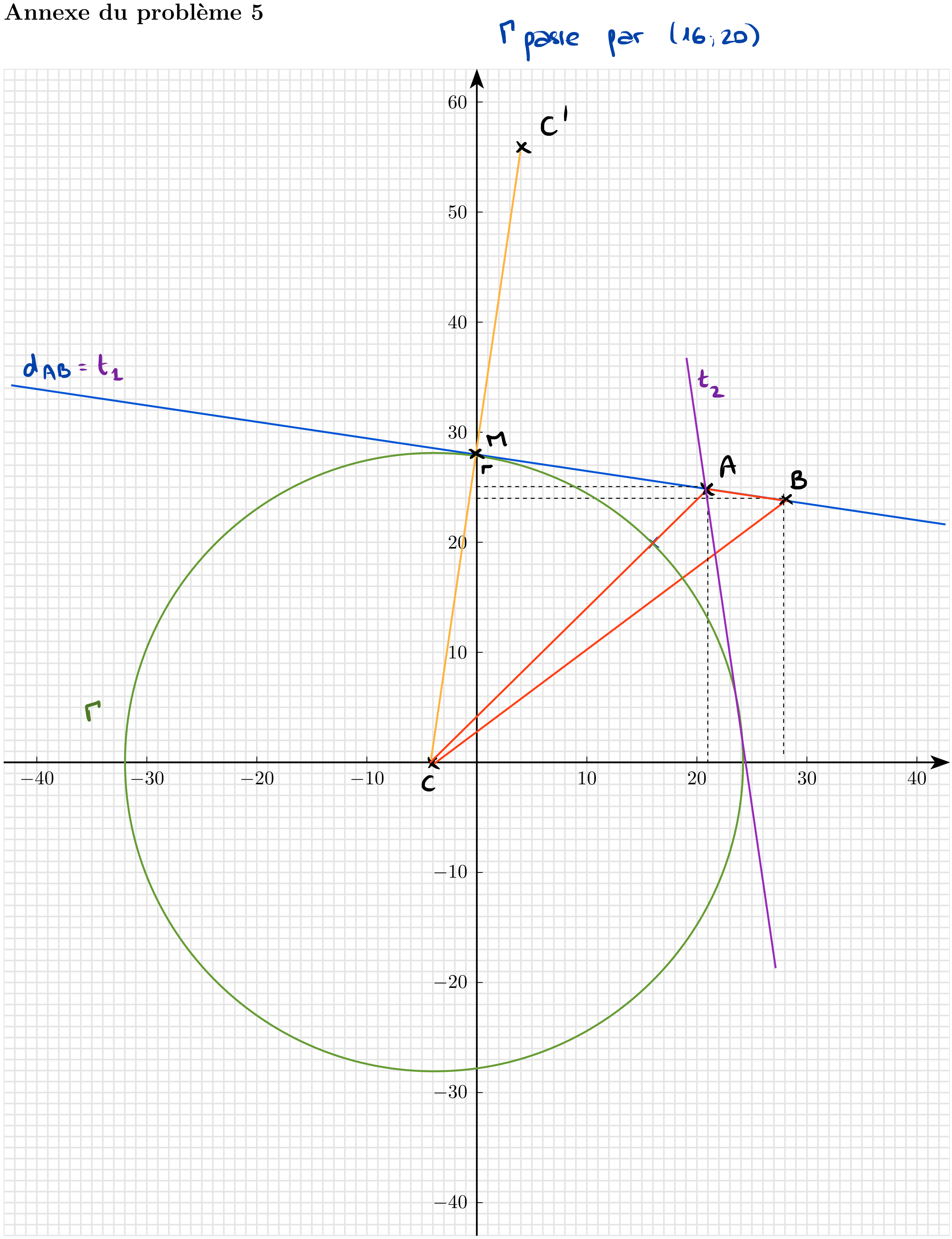
$7m^2 + 50m + 7 = 0$, $\Delta = 2304 = 48^2$, $m_{1,2} = \dfrac{-50 \pm 48}{14}$ $\nearrow -1/7$, $\searrow -7$

$\Rightarrow (t_1): y = -\frac{1}{7}x + 28 \Leftrightarrow x + 7y = 196$ c'est d_{AB}.

$\Rightarrow (t_2): y = -7x + 172$

Nom, prénom : ______________________

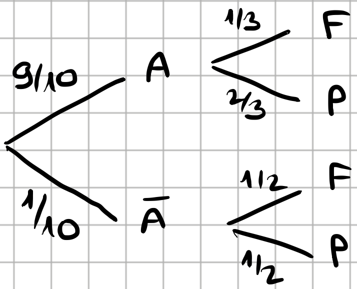
Annexe du problème 5



Probleme 6

a) $p(7P \text{ et } 2F) = C_2^9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{512}{2187} \cong 23{,}41\,\%$.

b) A = la piece est pipee $\quad p(F) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{20} = 35\,\%$



$$p(\bar{A} \mid F) = \frac{p(\bar{A} \cap F)}{p(F)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{7} \cong 14{,}29\,\%$$

c) On a 2 cas : i) les deux pièces sont pipées

ii) l'une est pipée et l'autre équilibrée.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & p = \frac{C_2^9}{C_2^{10}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{45} \cong 35{,}56\,\% \\ \text{ii)} & p = \frac{C_1^9 \cdot C_1^1}{C_2^{10}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{15} \cong 6{,}67\,\% \end{array}\right\}$$

donc la prob. cherchee vaut $42{,}22\,\% = \frac{19}{45}$

Ex. 1

a) $f(x) = \dfrac{3x(x^2-2)}{x^2-3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$, $Z = \{0, \pm\sqrt{2}\}$

		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$	
$3x$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-2	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-3	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

C'est une fonction impaire: $f(-x) = -f(x)$

AV: $\lim\limits_{x \to \pm\sqrt{3}} f(x) = \dfrac{"\pm 3\sqrt{3}"}{0} = \infty$, il y a des AV d'équation $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$.

Vu les degrés, il y a une AO:

$$\begin{array}{rl|l} & 3x^3 - 6x & x^2-3 \\ -(& 3x^3 - 9x\ ) & \hline \\ \hline & 3x & 3x \end{array}$$

L'éq de l'AO est $y = 3x$ et $\delta(x) = \dfrac{3x}{x^2-3}$

Le graphe de f coupe l'AO en $P(0;0)$.

b) $$f'(x) = \frac{(\overbrace{9x^2-6}^{3(3x^2-2)})(x^2-3) - (\overbrace{3x^3-6x}^{3x(x^2-2)})\cdot 2x}{(x^2-3)^2} =$$

$$= \frac{3(3x^4-11x^2+6) - 3(2x^4-4x^2)}{(x^2-3)^2} = \frac{3(\overbrace{x^4-7x^2+6}^{(x^2-6)(x^2-1)})}{(x^2-3)^2}$$

c)

		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$\sqrt{6}$	
$3(x^2-6)$	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2-1	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x^2-3)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	min	$\nearrow$

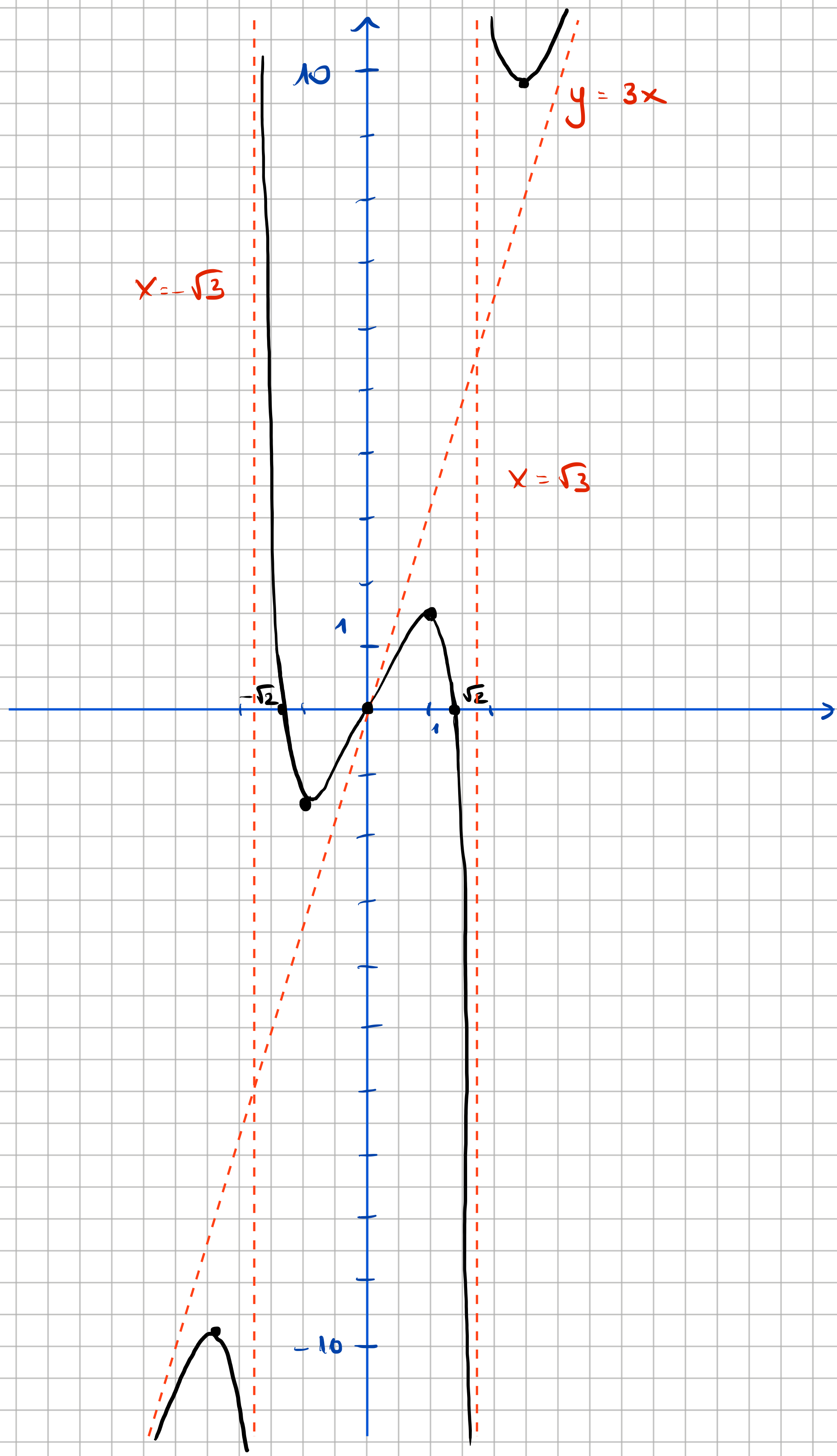
Max $(\underbrace{-\sqrt{6}}_{\cong 2{,}45}; \underbrace{-4\sqrt{6}}_{\cong 9{,}8})$

Min $(\sqrt{6}; +4\sqrt{6})$

Min $(-1; -1{,}5)$

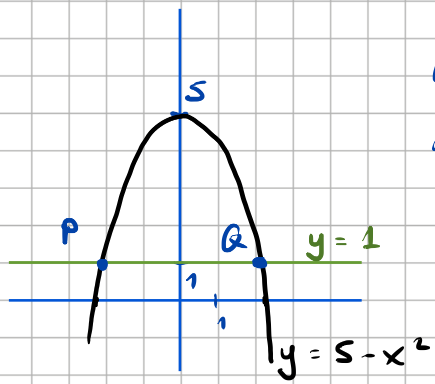
Max $(1; 1{,}5)$

d)



Ex. 2

b.)



La courbe $y = 5 - x^2$ est une parabole concave de sommet $S(0;5)$.

Les points P et Q ont pour abscisses les x tels que $5 - x^2 = 1$ donc $x^2 = 4$ et $x = \pm 2$.

Ainsi $P(-2;1)$ et $Q(2;-1)$.

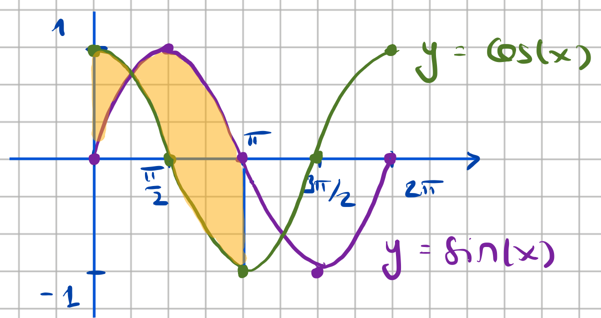
La courbe $y = 5 - x^2$ est au-dessus de $y = 1$ entre -2 et 2.

Donc $V = \pi \int_{-2}^{2} \left((5-x^2)^2 - 1 \right) dx \quad \left(\text{ou } 2\pi \int_{0}^{2} \left((5-x^2)^2 - 1 \right) dx \right)$

$= \pi \int_{-2}^{2} \left(x^4 - 10x^2 + 24 \right) dx = \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 24x \right) \Big|_{-2}^{2}$

$= \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{80}{3} + 48 \right) \cdot 2 = \pi \cdot \frac{416}{15} \cdot 2 = \frac{832\pi}{15} \cong 174,25$

a)



$\sin(x) = \cos(x) \iff$

$\tan(x) = 1 \iff$

$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

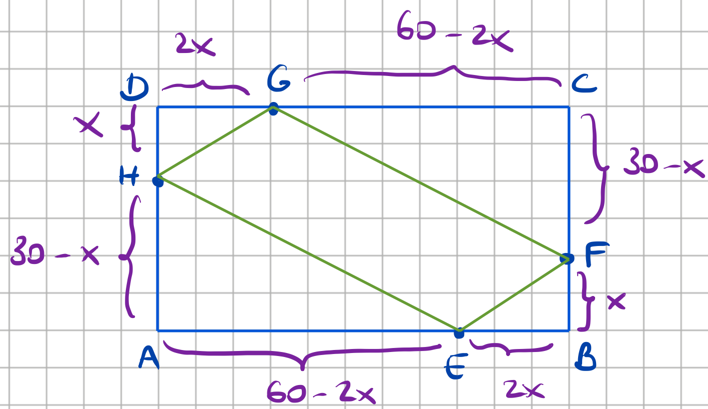
$A = \int_{0}^{\pi/4} \left(\cos(x) - \sin(x) \right) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} \left(\sin(x) - \cos(x) \right) dx =$

$= \left(\sin(x) + \cos(x) \right) \Big|_{0}^{\pi/4} + \left(-\cos(x) - \sin(x) \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 + 1 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \cong 2,83$

Ex. 3

L'aire du parallélogramme EFGH s'obtient en enlevant à l'aire du rectangle ABCD les aires des quatre triangles rectangles.



Donc

$$f(x) = 60 \cdot 30 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x + \\ - 2 \cdot \frac{1}{2}(60-2x)(30-x)$$

$$\Rightarrow f(x) = 1800 - 2x^2 - (1800 - 120x + 2x^2)$$
$$= -4x^2 + 120x$$

Les valeurs admissibles pour x sont $[0; 30]$.

On a $f'(x) = -8x + 120$ qui s'annule en $x = 15$, qui est positive avant 15 et négative après.

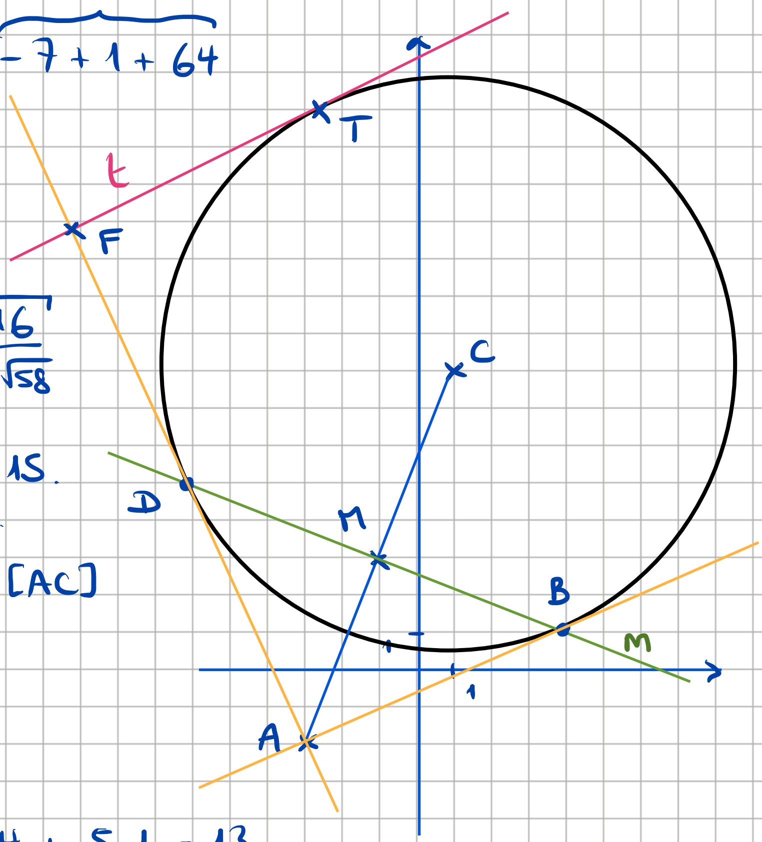
L'aire est donc maximale pour $x = 15$ et vaut alors 900.

Ex. 4

a) $(\Gamma) : (x-1)^2 + (y-8)^2 = \overbrace{-7+1+64}^{58}$

donc $C(1;8)$

et $r = \sqrt{58} \cong 7,6$



b) $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\|\vec{AC}\| = \underbrace{\sqrt{116}}_{>\sqrt{58}}$

donc A est extérieur à Γ.

$\delta = \|\vec{AC}\| - r = \sqrt{116} - \sqrt{58} \cong 3,15$.

c) Si M est le milieu de $[AC]$

alors $M(-1;3)$ et

$(m) : 2x + 5y = 13$.

d) $B(4;1)$ est sur m : $2 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 13$

et sur Γ : $(4-1)^2 + (1-8)^2 = 58$ et on a

$\vec{OD} = \vec{OM} + \underbrace{\vec{MD}}_{=\vec{BM}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow D(-6;5)$

[Avec le système : $x = -\frac{5}{2}y + \frac{13}{2}$, donc

$\underbrace{\left(-\frac{5}{2}y + \frac{11}{2}\right)^2}_{} + y^2 - 16y + 64 = 58 \qquad | \cdot 4$

$= \frac{1}{4}(-5y + 11)^2 = \frac{1}{4}(25y^2 - 110y + 121)$

$25y^2 - 110y + 121 + 4y^2 - 64y + 24 = 0$

$29y^2 - 174y + 145 = 0 \qquad \Delta = 13456 = 116^2$

$y_{1,2} = \frac{174 \pm 116}{58}$ ↗ $5 \Rightarrow D(-6;5)$ ↘ $1 \Rightarrow B(4;1)$]

e) $\delta(C;(AD)) = \frac{|7 \cdot 1 + 3 \cdot 8 + 27|}{\sqrt{49+9}} = \frac{58}{\sqrt{58}} = \sqrt{58} = r$.

donc (AD) est tangente à Γ.

f) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $(AB) : 3x - 7y = 5$.

g) On a $(t) : 3x - 7y + c = 0$ et $\sqrt{58} = \dfrac{|3 - 7 \cdot 8 + c|}{\sqrt{58}}$

donc $|c - 53| = 58$ donc $c - 53 = \pm 58$

Avec le "−", on retrouve (AB) et donc

$(t) : 3x - 7y + 111 = 0$.

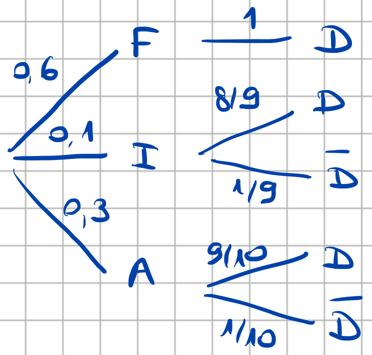
h) ABTF est un rectangle, en effet $(AB) \perp (AD)$ vu leurs équations. Son aire vaut $2r^2 = 2 \cdot 58 = 116$.

En effet, $AB = \delta(C ; (AD)) = r$ et $\|\vec{AF}\| = \|\vec{BT}\| = 2r$.

Ex 5

a) On note F = "un seul chiffre faux", I = "inversion de deux chiffres", A = "ajout ou oubli d'un chiffre"

Puis D = "le clef de contrôle détecte l'erreur".



b) $p(D) = 0,6 + 0,1 \cdot \frac{8}{9} + 0,3 \cdot \frac{9}{10} =$

$= \frac{863}{900} \cong 95,89\,\%$

c) C'est une prob. conditionnelle :

$p(F \mid D) = \frac{p(F \cap D)}{p(D)} =$

$= \frac{0,6 \cdot 1}{863/900} = \frac{540}{863} \cong 62,57\,\%$.

d) $p(D \mid \bar{A}) = \frac{p(D \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{0,6 + 0,1 \cdot 8/9}{0,6 + 0,1} = \frac{62}{63} \cong 98,41\,\%$

e) $p(8 \text{ CB détectés}) = C_8^{10} \left(\frac{863}{900}\right)^8 \cdot \left(\frac{37}{900}\right)^2 \cong 5,44\,\%$

f) $p(\bar{D} \text{ sur au moins un}) = 1 - p(10 \text{ CB détectés}) =$

$= 1 - \left(\frac{863}{900}\right)^{10} \cong 34,28\,\%$.