Problème 1

a) Appelons x le nombre d'élèves ayant participé à la sortie. On a les équations suivantes.

- Bus : $x \equiv 46 \bmod 77$
- Télécabine : $x \equiv 18 \bmod 35$
- Télésiège : $x \equiv 1 \bmod 3$.

On a $x \equiv 46 \bmod 77 \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 46 \equiv 4 \bmod 7 \\ x \equiv 46 \equiv 2 \bmod 11 \end{cases}$,

$x \equiv 18 \bmod 35 \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 18 \equiv 3 \bmod 5 \\ x \equiv 18 \equiv 4 \bmod 7 \end{cases}$ Donc le

système à résoudre est $\begin{cases} x \equiv 1 \bmod 3 \\ x \equiv 3 \bmod 5 \\ x \equiv 4 \bmod 7 \\ x \equiv 2 \bmod 11 \end{cases}$

b) On a $N = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155$,

[6] $N_1 = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$,

$N_2 = 3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$, $N_3 = 3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$ et $N_3 = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

- On résout $\underbrace{385}_{\equiv 1} x \equiv 1 \bmod 3$ donc $x_1 = 1$;
- Puis $\overbrace{231}^{\equiv 1} x \equiv 1 \bmod 5$ donc $x_2 = 1$;
- Puis $\underbrace{165}_{\equiv 4} x \equiv 1 \bmod 7$ donc $x_3 = 2$;
- Et enfin $\underbrace{105}_{\equiv 6} x \equiv 1 \bmod 11$ donc $x_4 = 2$.

On pose alors $x = 385 \cdot 1 \cdot 1 + 231 \cdot 3 \cdot 1 + 165 \cdot 4 \cdot 2 + 105 \cdot 2 \cdot 2 =$

$= 2818 \equiv 508 \bmod 1155$.

Il y a donc 508 élèves qui ont participé à la journée à ski.

Problème 2

a) Elle va envoyer 25^3 mod 253, donc

$$25^3 \equiv 119 \cdot 25 \equiv 192 \bmod 253.$$ Ainsi $C = 192$

b) Pour la signature, il faut commencer par déterminer l'exposant de décryptage d_A d'Alice. On a

$851 = 23 \cdot 37$ donc $\varphi(851) = 22 \cdot 36 = 792$ et

On résout $5d \equiv 1 \bmod 792$. On a

$792 = 158 \cdot 5 + 2$ donc $1 = 5 - 2 \cdot 2 =$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$ $\quad = 5 - 2(792 - 158 \cdot 5) =$

$= 317 \cdot 5 - 2 \cdot 792.$

Donc $d_A = 317$. Alice va donc calculer 25^{317} mod 851

x	reste	n	25^{2^n} mod 851	Contributions
317	1	0	25	25
158	0	1	625	–
79	1	2	16	16
39	1	3	256	256
19	1	4	9	9
9	1	5	81	81
4	0	6	604	–
2	0	7	588	–
1	1	8	238	238

donc $$25^{317} \equiv \underbrace{25 \cdot 16 \cdot 256}_{\equiv 280} \cdot \underbrace{9 \cdot 81 \cdot 238}_{\equiv 749} \equiv 374 \bmod 851$$

Donc $s \equiv 374^3 \equiv 220 \cdot 374 \equiv 55 \bmod 253$ donc $s = 55$

Probleme 3

a) $u_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{16} = \underbrace{0{,}3125}_{\cong 0{,}31}$; $u_3 = \frac{185}{1024} \cong \underbrace{0{,}1807}_{\cong 0{,}18}$

b) On le démontre par récurrence. On a $0 \leq \underbrace{u_1}_{=1/2} \leq 1$ et si $0 \leq u_n \leq 1$, alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}u_n^2 \geqslant \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 0 = 0 \text{ et}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}u_n^2 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \leq 1.$$

c) Montrons que la suite est décroissante.
On procède par récurrence : $u_2 = \frac{5}{16} \leq \frac{1}{2} = u_1$.

Supposons que $u_n \leq u_{n-1}$ et calculons

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}u_n^2 \underset{u_n \geqslant 0}{\leq} \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{4}u_{n-1}^2 = u_n$$

d'où le résultat. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2-u_n)}{4} \geqslant 0$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{\overbrace{u_n}^{\leq \frac{1}{2}}}{4}}_{<1}$

d) La suite est décroissante et minorée par 0, donc convergente. Appelons L sa limite, on a

$$L = \frac{1}{2}L + \frac{1}{4}L^2 \quad \text{donc} \quad 4L = 2L + L^2 \iff$$

$$\underbrace{L^2 - 2L}_{L(L-2)} = 0 \quad \text{donc} \quad L = 0 \quad \text{car } u_n \leq \frac{1}{2} < 2 \ \forall n.$$

Problème 4

a) $u_k = \left(\dfrac{3k-1}{2k+2}\right)^k$; $u_k > 0 \quad \forall k \geq 1$.

On applique le critère la racine : $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_k} = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{3k-1}{2k+2} = \dfrac{3}{2}$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, la série diverge.

b) On a $u_k = \underbrace{\dfrac{1}{k}}_{\leq 1 \text{ si } k \geq 1} \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^k$, $u_k > 0 \quad \forall k \geq 1$

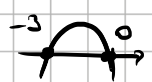
donc $u_k \leq \left(\frac{3}{5}\right)^k$ et la série de terme général $\left(\frac{3}{5}\right)^k$ est géométrique de raison $r = \frac{3}{5} < 1$. donc convergente.
Par le critère de comparaison, la série de terme u_k converge également.

(on peut aussi utiliser le critère du quotient)

d) [Posons $u_k = \dfrac{k+1}{k^2+1}$ et $v_k = \dfrac{1}{k}$, dont la série associée diverge.

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{u_k}{v_k} = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k^2+k}{k^2+1} = 1$, les deux séries sont équivalentes, donc la série de terme général u_k diverge et la série alternée de terme général u_k n'est pas absolument convergente] ⇐ pas demandé

On a $u_{k+1} - u_k = \dfrac{k+2}{(k+1)^2+1} - \dfrac{k+1}{k^2+1} =$



$$= \frac{\overbrace{(k+2)(k^2+1)}^{k^3+2k^2+k+2} - \overbrace{(k+1)(k^2+2k+2)}^{k^3+3k^2+4k+2}}{((k+1)^2+1)(k^2+1)} = \frac{\overbrace{-k^2-3k}^{=-k(k+3)<0 \text{ si } k\geq 1}}{\underbrace{((k+1)^2+1)(k^2+1)}_{>0 \ \forall k \geq 1}} < 0$$

donc $u_{k+1} \leq u_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

De plus $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$. Donc la série alternée converge.

Problème 5

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ $\left(= \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \right)$

$f''(x) = \underbrace{-\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}}_{= \frac{-1}{4\sqrt{(x+1)^3}}}$, $f'''(x) = \underbrace{\frac{3}{8}(x+1)^{-5/2}}_{= \frac{3}{8\sqrt{(x+1)^5}}}$

Donc $P_3(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{3}{6 \cdot 8} x^3 =$
(autour de $a=0$)

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$

Donc $\sqrt{2} = f(1) \approx P_3(1) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{23}{16} = 1{,}4375$
($\sqrt{2} \cong 1{,}4142$)

b) On a $R_3(1) = \dfrac{f^{(4)}(c)}{4!} \cdot 1^4 = \dfrac{-15}{384 \cdot \sqrt{(c+1)^7}}$ où $c \in [0;1]$

$f^{(4)}(x) = \frac{-15}{16}(x+1)^{-7/2}$

La plus grande valeur de cette fraction s'obtient si $c+1$ est le plus petit possible donc quand $c=0$.

Donc $|R_3(1)| \leq \left| \dfrac{-15}{384 \cdot 1^7} \right| = \dfrac{15}{384} = \dfrac{5}{128} = 0{,}0390625.$

Problème 6

a) On a $(2x-1)\cdot y' = \frac{y}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{4x^2-1}$

donc $\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{(2x+1)(2x-1)}\,dx$.

Cherchons a et b tels que $\frac{1}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{2x-1}$

$\Leftrightarrow (2x-1)a + (2x+1)\cdot b = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a+b)=0 \\ b-a=1 \end{cases}$

donc $b=-a$ et $a=-\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{2}$.

Ainsi $\int \frac{1}{(2x+1)(2x-1)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{2x-1}dx$

$$= \underbrace{-\frac{1}{4}\ln(|2x+1|) + \frac{1}{4}\ln(|2x-1|)}_{=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{|2x-1|}{|2x+1|}\right) = \ln\left(\sqrt[4]{\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|}\right)} + \tilde{c}$$

Donc $\ln(|y|) = \ln\left(\sqrt[4]{\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|}\right) + \tilde{c} \Leftrightarrow y = C\cdot\sqrt[4]{\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|}$.

b)

i) $y''-2y'+5y=0$.

On résout $r^2-2r+5=0$, $\Delta = 4-20=-16$ donc

$r_{1,2} = \frac{2\pm 4i}{2} = 1\pm 2i$.

La solution est donc $y = e^x\left(C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)\right)$

ii) $y''-2y'+5y = 12xe^x$

On a déjà la solution particulière de l'EHA vu c).

Cherchons une solution particulière de l'éq.

$$y''-2y'+5y = 12xe^x.$$

Posons $p(x) = (ax+b)e^x$. Alors $p'(x) = ae^x + (ax+b)e^x =$

$= (ax+a+b)e^x$ et $p''(x) = (\underbrace{a+ax+a+b}_{ax+2a+b})e^x$.

On veut $12xe^x = (\underbrace{ax + \cancel{2a} + b - 2ax - \cancel{2a} - 2b + 5ax + 5b}_{4ax+4b})e^x$

donc $a = 3$ et $b = 0$.

On a donc la solution particulière $p(x) = 3xe^x$.

La solution générale est donc

$$y = e^x(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)) + 3xe^x$$

iii) On veut $1 = y(0) = e^0 \cdot (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) + 0 = c_1$

donc $c_1 = 1$.

On a $y'(x) = e^x (c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)) +$

$+ e^x \cdot (-2c_1 \cdot \sin(2x) + 2c_2 \cos(2x)) + 3e^x + 3xe^x$

et $2 = y'(0) = 1 + 2c_2 + 3$ donc $c_2 = -1$

et $y = e^x(\cos(2x) - \sin(2x)) + 3xe^x$.

Probleme 1

Appelons x le nombre de pieces de 20ct et y de 50ct.

a) On résout $22,25x + 24,25y = 100 \quad | \cdot 4$

$\Leftrightarrow 89x + 97y = 400$

On a $97 = 89 + 8$ donc $1 = 89 - 11(97-89)$

$89 = 8 \cdot 11 + 1$ $\quad = 12 \cdot 89 - 11 \cdot 97$

Donc $89 \cdot 4800 + 97 \cdot (-4400) = 400$, ainsi

$$\begin{cases} x = 4800 + 97k \\ y = -4400 - 89k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Comme il faut qe $x, y \geq 0$, on a $97k \geq -4800$

$\Leftrightarrow k \geq -49,5$ donc $k \geq -49$ et $89k \leq -4400$

$\Leftrightarrow k \leq -49,4$ donc $k \leq -50$ $\lightning$ (si $k=-49$, $y=-39$
si $k=-50$, $x=-50$)

Il n'y a donc pas de solution dans ce cas.

b) On resout $89x + 97y = 40'000$ donc

$$\begin{cases} x = 480'000 + 97k \\ y = -440'000 - 89k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{vu a).}$$

On a $x \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -4948,4$ donc $k \geq -4948$

et $y \geq 0 \Leftrightarrow k \leq -4943,8$ donc $k \leq -4944$

$k = -4944$: $x = 432$, $y = 16$, prix : $94,4$ € ← solution la + économique car y est minimal

($k = -4945$: $x = 335$, $y = 105$, prix : $119,5$ €

$k = -4946$: $x = 238$, $y = 194$, prix : $144,6$ €

$k = -4947$: $x = 141$, $y = 283$, prix : $169,7$ €

$k = -4948$: $x = 44$, $y = 372$, prix : $194,8$ €)

Problème 2

Appelons x le nombre de cailloux. On a

$$\begin{cases} x \equiv 12 \mod 21 \\ x \equiv 29 \mod 32 \\ x \equiv 22 \mod 55 \end{cases}$$

$M = 21 \cdot 32 \cdot 55 = 36'960$

$M_1 = 32 \cdot 55 = 1760$, $M_2 = 1155$

et $M_3 = 21 \cdot 32 = 672$.

- On résout $\underbrace{1760}_{\equiv 17 \equiv -4} x \equiv 1 \mod 21$. Comme $(-4) \cdot 5 = -20 \equiv$ $\equiv 1 \mod 21$, on choisit $x_1 = 5$.

- On résout $\underbrace{1155}_{\equiv 3} x \equiv 1 \mod 32$. Comme $3 \cdot 11 \equiv 1 \mod 32$ on choisit $x_2 = 11$.

- On résout $\underbrace{672}_{\equiv 12} x \equiv 1 \mod 55$. Résolvons $12x + 55y = 1$.

On a $55 = 4 \cdot 12 + 7$, $12 = 7 + 5$, $7 = 5 + 2$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$

donc $1 = 5 - 2(7-5) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 3(12-7) - 2 \cdot 7 =$

$= 3 \cdot 12 - 5 \cdot 7 = 3 \cdot 12 - 5(55 - 4 \cdot 12) = 23 \cdot 12 - 5 \cdot 55$

On choisit $x_3 = 23$.

Ainsi $x = 12 \cdot 1760 \cdot 5 + 29 \cdot 1155 \cdot 11 + 22 \cdot 672 \cdot 23 =$

$= 814'077 \equiv 957 \mod 36'960$.

Donc $x \equiv 957 \mod 36960$ et 957 est le nombre minimal de cailloux.

Problème 3

a) On a $n = 953 \cdot 727 = 692\,831$, $\varphi(n) = 952 \cdot 726 = 691\,152$.

On a $5d \equiv 1 \mod \varphi(n)$

Par le thm d'Euler $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m$ si a est premier à m. Appliquons cela à $a = e = 5$ et $m = \varphi(n)$.

Donc $\varphi(m) = \varphi(\underbrace{952}_{8 \cdot 7 \cdot 17} \cdot \underbrace{726}_{2 \cdot 3 \cdot 11^2}) = \underbrace{\varphi(16)}_{8 \cdot 1} \cdot \underbrace{\varphi(3)}_{2} \cdot \underbrace{\varphi(7)}_{6} \cdot \underbrace{\varphi(11^2)}_{11 \cdot 10} \cdot \underbrace{\varphi(17)}_{16}$

$= 168\,960$.

Donc $\underbrace{e^{168960}}_{e \cdot e^{168959}} \equiv 1 \mod 619\,152$ donc $d \equiv e^{168959} \mod 619\,152$

b) On a $2024^5 \equiv (2024^2)^2 \cdot 2024 \equiv (-60\,410)^2 \cdot 2024 \equiv$

$\equiv 227\,223 \cdot 2024 \equiv 552399 \mod 692831$.

c) On a $552\,399^{276\,461} \equiv 2024^{5 \cdot 276461} \equiv 2024 \mod \underbrace{692831}_{n}$

car $d = 276\,461$ est l'inverse de $e \mod \varphi(n)$.

Probleme 4

a) $u_1 = 3$, $u_2 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \cong 5{,}66$, $u_3 \cong 6{,}53$, $u_4 \cong 6{,}79$

b) Vu les quatre premiers termes, on a $u_{n-1} \leq u_n$ et $u_n \leq 7$ si $n \leq 3$.

Supposons ensuite que $\underbrace{u_{n-1} \leq u_n}_{\Leftrightarrow u_n - u_{n-1} \geq 0}$ et $u_n < 7$ (HR).

Calculons $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 20} < \sqrt{4 \cdot 7 + 20} = \sqrt{48} < \sqrt{49} = 7$

donc $u_n \leq 7 \ \forall n \geq 1$.

De plus $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 20} \overset{HR}{\geq} \sqrt{4u_{n-1} + 20} = u_n$

donc $u_n \leq u_{n+1} \ \forall n \geq 1$.

c) La suite est croissante et majorée donc convergente

Appelons L sa limite, on a $L = \sqrt{4L+20} \underset{L>0}{\Leftrightarrow}$

$L^2 - 4L - 20 = 0$ dont les solutions sont

$$\frac{4 \pm \sqrt{96}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{6} \quad \text{donc} \quad L = 2 + 2\sqrt{6} \cong 6{,}9 \quad \text{car } L > 0.$$

Problème 5

Critère de Leibniz : la série alternée $(-1)^{k+1} u_k$ avec $u_k \geq 0$ converge si $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_{k+1} \leq u_k$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_k = 0$.

Ici $u_k = \frac{1}{7k}$, on a $u_{k+1} = \frac{1}{7(k+1)} \leq \frac{1}{7k} = u_k$ car $7k+7 \geq 7k$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{7k} = 0$. Donc la série converge.

Regardons ensuite si la série est absolument convergente, donc si la série $\frac{1}{7} + \frac{1}{2 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{7k}$ converge.

Posons $v_k = \frac{1}{k}$, la série de terme v_k diverge (série harmonique).

On a $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{|u_k|}{v_k} = \lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{7k} \cdot k = \frac{1}{7} \neq 0, \infty$ donc les séries correspondantes sont équivalentes. Ainsi la série de terme $|u_k|$ diverge et la série de terme u_k n'est pas absolument convergente, elle est donc semi-convergente.

Problème 6

$f(x) = e^x \cdot \cos(x)$ et $a = 1$, $f(1) = e \cdot \cos(1)$

$f'(x) = e^x\,(\cos(x) - \sin(x))$, $f'(1) = e\,(\cos(1) - \sin(1))$

$f''(x) = e^x\,(\cos(x) - \sin(x) - \sin(x) - \cos(x)) = -2e^x \sin(x)$,

$f''(1) = -2e\sin(1)$.

Donc $P_2(x) = e \cdot \cos(1) + e\,(\cos(1) - \sin(1)) \cdot (x-1) - e \cdot \sin(1)\,(x-1)^2$.

Problème 1

Posons x = nombre d'adultes et y = nombre d'enfants

On doit résoudre $18x + 7{,}5y = 900 \Leftrightarrow 36x + 15y = 1800$

$\Leftrightarrow 12x + 5y = 600$ avec les conditions $x, y \geq 0$, $x \geq y$

On a $12 = 2 \cdot 5 + 2$ et $5 = 2 \cdot 2 + 1$, donc

$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(12 - 2 \cdot 5) = 12 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 \quad | \cdot 600$

$12 \cdot (-1200) + 5 \cdot 3000 = 600.$

La solution générale de l'équation est donc

$$\begin{cases} x = -1200 + 5k \\ y = 3000 - 12k \end{cases}$$

On veut $x \geq y \geq 0$: $y \geq 0 \Leftrightarrow 3000 - 12k \geq 0$

donc $k \leq \frac{3000}{12} = 250$ et $x \geq y \Leftrightarrow$

$-1200 + 5k \geq 3000 - 12k \Leftrightarrow 17k \geq 4200 \Leftrightarrow$

$k \geq \frac{4200}{17} \cong 247{,}1$ donc $k = 248, 249$ ou 250 :

$k = 248$: $x = 40$, $y = 24$ donc 64 personnes

$k = 249$: $x = 45$, $y = 12$ donc 57 personnes

$k = 250$: $x = 50$, $y = 0$ donc 50 personnes

Problème 2

On cherche x tel qe $9000 \leq x \leq 10'000$, et

$$\begin{cases} x \equiv 9 \mod 10 \\ x \equiv 9 \mod 11 \\ x \equiv 0 \mod 13 \end{cases}$$

On applique le théorème chinois : $M = 10 \cdot 11 \cdot 13 = 1430$,

$M_1 = 11 \cdot 13 = 143$, $M_2 = 10 \cdot 13 = 130$ et $M_3 = 10 \cdot 11 = 110$.

On résout :

- $143x \equiv 1 \mod 10 \Leftrightarrow 3x \equiv 1 \mod 10$.

  Comme $3 \cdot 7 = 21 \equiv 1 \mod 10$, on choisit $x_1 = 7$.

- $130x \equiv 1 \mod 11 \Leftrightarrow 9x \equiv 1 \mod 11$

  Comme $9 \cdot 5 = 45 \equiv 1 \mod 11$, on choisit $x_2 = 5$.

- $110x \equiv 1 \mod 13 \Leftrightarrow 6x \equiv 1 \mod 13$.

  Comme $6 \cdot 11 = 66 \equiv 1 \mod 13$, on choisit $x_3 = 11$.

  Pas nécessaire car $b_3 = 0$

On pose alors $x = 9 \cdot 143 \cdot 7 + 9 \cdot 130 \cdot 5 = 14859 \mod 1430$

$14859 - 4 \cdot 1430 = 9139$, qui est la seule réponse entre 9000 et 10000. Donc $x = 9139$

Problème 3

Alice : $(n_A = 493 \; ; \; e_A = 5)$, $493 = 17 \cdot 29$

Bob : $(n_B = 247 \; ; \; e_B = 11)$

Alice envoie $C = 33^{11} \bmod 247$ à Bob.

x	reste	n	$33^{2^n} \bmod 247$	Contribution
11	1	0	33	33
5	1	1	101	101
2	0	2	74	–
1	1	3	42	42

Donc $C = 33 \cdot 101 \cdot 42 \equiv 184 \bmod 247$.

Pour le signer, elle a besoin de sa clé privée, d_A.

on résout $5x \equiv 1 \bmod \underbrace{16 \cdot 28}_{=448}$ donc $5x + 448y = 1$

$448 = 5 \cdot 89 + 3$ donc $1 = 3 - 2 = 3 - (5-3) = 2 \cdot 3 - 5 =$

$5 = 3 + 2$ $= 2 \cdot (448 - 5 \cdot 89) - 5 =$

$3 = 2 + 1$ $= 2 \cdot 448 - 179 \cdot 5$

Donc $d \equiv -179 \bmod 448$ donc $d_A = 269$

La signature sera donc $S = 33^{269} \bmod 493$ qu'il faudra ensuite crypter.

x	reste	n	$33^{2^n} \bmod 493$	Contribution
269	1	0	33	33
134	0	1	103	–
67	1	2	256	256
33	1	3	460	460
16	0	4	103	–
8	0	5	256	–
4	0	6	460	–
2	0	7	103	–
1	1	8	256	256

Donc $S \equiv 33 \cdot 256^2 \cdot 460 \equiv 33 \cdot 460^2 \equiv 33 \cdot 103 \equiv 441 \bmod 493$.

Elle calcule ensuite $441^{11} \bmod 247$:

$\underbrace{441}_{\equiv 194} \cdot \underbrace{441^2}_{\equiv 92} \cdot \underbrace{441^{2^3}}_{\equiv 66^2 \equiv 157} \equiv 194 \cdot 92 \cdot 157 \equiv 168 \bmod 247$.

↳ Alice envoie $(184, 168)$.

Probleme 4

a) $u_2 = \sqrt{5\cdot(-2)+14} = \sqrt{4} = 2$; $u_3 = \sqrt{5\cdot 2+14} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
$\cong 4,899$

$u_4 = \sqrt{10\sqrt{6}+14} \cong 6,204$

b) On doit montrer que $u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow$

$\sqrt{5u_n+14} \geq u_n \underset{\substack{\text{car } u_n \geq 0 \\ \text{pour tout } n \geq 2}}{\Leftrightarrow} 5u_n + 14 \geq u_n^2 \Leftrightarrow$

$\underbrace{u_n^2 - 5u_n - 14}_{(u_n-7)(u_n+2)} \geq 0$ ce qui est vrai car $u_n \leq 7$ vu c)

et $u_n \geq 0 \geq -2$ (à cause de $\sqrt{\ }$)

On peut aussi procéder par récurrence.

On a vu que $u_2 = 2 \geq u_1$. On suppose alors que

$u_n \geq u_{n-1}$ (HR) donc $5u_n \geq 5u_{n-1} \Leftrightarrow 5u_n + 14 \geq 5u_{n-1} + 14$

$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{5u_n+14}}_{=u_{n+1}} \geq \underbrace{\sqrt{5u_{n-1}+14}}_{=u_n}$ d'où le résultat.

c) On doit montrer que $u_n \leq 7$ pour tout $n \geq 1$.

On procède par récurrence sur n.

Si $n = 1$, $u_1 = -2 \leq 7$

Supposons que $u_n \leq 7$ et calculons

$u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 14} \overset{HR}{\leq} \sqrt{5\cdot 7 + 14} = \sqrt{49} = 7$

d'où le résultat

d) La suite est croissante et majorée, donc elle converge vers une limite $L \geq 0$ telle que

$L = \sqrt{5L+14} \underset{L\geq 0}{\Leftrightarrow} \underbrace{L^2 - 5L - 14}_{(L-7)(L+2)} = 0 \underset{L>0}{\Rightarrow} L = 7.$

Problème 5

a) $u_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$u_2 = u_1 + 8 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{8}{81} = \frac{17}{81}$

b) $u_3 = u_2 + 8^2 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 = \frac{217}{729}$

$\frac{n-k}{2(n-k+1)}$

c) $u_n = u_{n-1} + 8^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^2$

d) $u_n = 8^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{2n}} + 8^{n-2} \cdot \frac{1}{3^{2(n-1)}} + 8^{n-3} \cdot \frac{1}{3^{2(n-2)}} + \ldots +$

$+ 8 \cdot \frac{1}{3^{2 \cdot 2}} + \frac{1}{3^2} =$

$= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n + \frac{1}{8}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{n-2} + \ldots +$

$+ \frac{1}{8}\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{9}\right) =$

$= \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{9} \left(1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}\right)$

$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1-(8/9)^n}{1-8/9} = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$

e) On a donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \underbrace{\left(\frac{8}{9}\right)^n}_{\to 0}\right) = 1$

Si n est grand, la surface sera quasiment entièrement noire.

Problème 6

a) On commence par résoudre l'équation homogène

$$u_{n+1} = 2u_n + 8u_{n-1}$$

Son équation caractéristique est $\lambda^2 = 2\lambda + 8 \iff$

$\underbrace{\lambda^2 - 2\lambda - 8}_{(\lambda-4)(\lambda+2)} = 0$ donc $u_n^{(h)} = a \cdot 4^n + b \cdot (-2)^n$

On cherche une solution particulière. Comme 1 n'est pas un zéro de l'éq. caractéristique et que $f(n) = 9$ est un polynôme de degré 0, la solution particulière est de la forme $x_n^{(p)} = c$. La relation de récurrence implique que

$$x_{n+1}^{(p)} = 2x_n^{(p)} + 8x_{n-1}^{(p)} + 9 \iff$$

$$c = 2c + 8c + 9 \iff 9c = -9 \quad \text{donc } c = -1.$$

La solution générale est $u_n = u_n^{(h)} + x_n^{(p)} = a \cdot 4^n + b(-2)^n - 1$

On utilise alors les conditions initiales :

$$\begin{cases} -3 = a + b - 1 & \iff \quad a + b = -2 \\ 21 = 4a - 2b - 1 & \iff \quad 2a - b = 11 \end{cases}$$

donc $3a = 9$ d'où $a = 3$ et $b = -5$.

Donc $u_n = 3 \cdot 4^n - 5 \cdot (-2)^n - 1$.

b) En particulier, $u_2 = 3 \cdot 4^2 - 5 \cdot (-2)^2 - 1 = 27$

[2] ou $u_2 = 2u_1 + 8u_0 + 9 = 2 \cdot 21 + 8 \cdot (-3) + 9 = 27$

OS - juin

Ex. 1

$$\begin{cases} x \equiv 6 \mod 14 \\ x \equiv 12 \mod 15 \\ x \equiv 16 \mod 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 6 \mod 2 \Leftrightarrow x \equiv 0 \mod 2 \\ x \equiv 6 \mod 7 \\ x \equiv 12 \mod 5 \Leftrightarrow x \equiv 2 \mod 5 \\ x \equiv 12 \mod 3 \Leftrightarrow x \equiv 0 \mod 3 \\ x \equiv 16 \mod 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 0 \mod 2 \\ x \equiv 6 \mod 7 \\ x \equiv 2 \mod 5 \\ x \equiv 0 \mod 3 \\ x \equiv 16 \mod 17 \end{cases}$$

$M = 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 17 = 3570$

$M_2 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 17 = 510$, $M_3 = 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 17 = 714$

et $M_4 = 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 210$.

* $\underbrace{510}_{490+20} x \equiv 1 \mod 7 \Leftrightarrow 6x \equiv 1 \mod 7$ donc $x_2 = 6$

* $714 x \equiv 1 \mod 5 \Leftrightarrow 4x \equiv 1 \mod 5$ donc $x_3 = 4$

* $\overbrace{210}^{170+40} x \equiv 1 \mod 17 \Leftrightarrow 6x \equiv 1 \mod 17$ donc $x_4 = 3$

Ainsi $x = 6 \cdot 510 \cdot 6 + 2 \cdot 714 \cdot 4 + 16 \cdot 210 \cdot 3 = 34152 \equiv$

$\equiv 2022 \mod 3570$.

$S = \{2022 \mod 3570\}$.

Ou plus directement :

$$\begin{cases} x \equiv 6 \mod 14 \\ x \equiv 12 \mod 15 \\ x \equiv 16 \mod 17 \end{cases}$$

$\text{pgcd}(14,15) = \text{pgcd}(14,17) = \text{pgcd}(15;17) = 1$

$M = 14 \cdot 15 \cdot 17 = 3570$, $M_1 = 15 \cdot 17 = 255$, $M_2 = 14 \cdot 17 = 238$, $M_3 = 14 \cdot 15 = 210$

- $255x \equiv 1 \mod 14 \Leftrightarrow 3x \equiv 1 \mod 14$ donc $x_1 = 5$
- $238x \equiv 1 \mod 15 \Leftrightarrow 13x \equiv -2x \equiv 1 \mod 15$ donc $x_2 = 7$
- $210x \equiv 1 \mod 17 \Leftrightarrow 6x \equiv 1 \mod 17$ donc $x_3 = 3$

Donc $x = 6 \cdot 5 \cdot 255 + 12 \cdot 7 \cdot 238 + 16 \cdot 3 \cdot 210 = 37722 \equiv$

$\equiv 2022 \mod 3570$.

Problème 2

On a $589 = 19 \cdot 31$, $e = 7$.

On cherche d tel que $7d \equiv 1 \bmod \overbrace{18 \cdot 30}^{540}$

$540 = 77 \cdot 7 + 1$ donc $d = -77 + 540 = 463$.

et il faut calculer $61^{463} \bmod 589$

d	r	n	$61^{2^n} \bmod 589$	Contributions
463	1	0	61	61
231	1	1	187	187
115	1	2	218	218
57	1	3	404	404
28	0	4	63	—
14	0	5	435	—
7	1	6	156	156
3	1	7	187	187
1	1	8	218	218

donc $m = 61 \cdot 187 \cdot 218 \cdot 404 \cdot 156 \cdot 187 \cdot 218 \equiv$

218

404

$\equiv 61 \cdot 218 \cdot \underbrace{404^2}_{\equiv 63} \cdot 156 \equiv 123 \bmod 589$

Le rendez-vous est fixé au n° 123 Baker Street.

Problème 3

a) Commençons par résoudre $\overbrace{r^2+r-12}^{(r+4)(r-3)}=0$, donc la solution de l'EHA est $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}$.

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation différentielle.

On essaie avec $y_p = a\cos(2x) + b\sin(2x)$

On a $y_p' = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)$

$y_p'' = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x)$ donc

$$y_p'' + y_p' - 12y_p = (-4a+2b-12a)\cos(2x) +$$
$$+ (-4b-2a-12b)\cdot\sin(2x) =$$
$$= (-16a+2b)\cos(2x) + (-2a-16b)\sin(2x)$$

donc $\begin{cases} -16a+2b=0 & \Rightarrow \quad b=8a \\ -2a-16b=65 & \Rightarrow \quad -130a=65 \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{1}{2} \end{cases}$

et $b=-4$. Donc la solution générale est

$$y = -\frac{1}{2}\cos(2x) - 4\sin(2x) + C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}$$

b) $(4x^2+1)\cdot y' = (1+4x)\cdot y$ donc

$$\frac{y'}{y} = \frac{1+4x}{4x^2+1} \quad \text{donc} \quad \ln(|y|) = \int \frac{1}{\underbrace{4x^2+1}_{(2x)^2+1}}\,dx +$$
$$+ \int \frac{4x}{4x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\arctan(2x) + \frac{1}{2}\ln(|4x^2+1|)$$

donc $y = e^{\frac{1}{2}\arctan(2x)} \cdot \sqrt{4x^2+1} \cdot C$

Ex. 4

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \underbrace{\frac{1}{13}(5+12i)}_{a} z + \underbrace{4-32i}_{b}$$

a) Comme $|a| = \frac{1}{13}\sqrt{5^2+12^2} = 1$, il s'agit bien d'une isométrie propre.

C'est donc une translation ou une rotation, mais comme $a \neq 1$, c'est une rotation.

Calculons son centre (donc son PF) : $f(z) = z$.

$$\frac{1}{13}(5+12i)z + 4 - 32i = z \iff$$

$$\Big(\underbrace{1 - \frac{1}{13}(5+12i)}_{\frac{1}{13}(8-12i)}\Big) z = 4 - 32i$$

donc $z = \frac{4-32i}{8-12i} \cdot 13 \cdot \frac{8+12i}{8+12i} =$

$$= \frac{\overbrace{13 \cdot 4 \cdot 4}^{208}(1-8i)(2+3i)}{\underbrace{64+144}_{208}} = 2 + 3i - 16i + 24 =$$

$$= 26 - 13i.$$

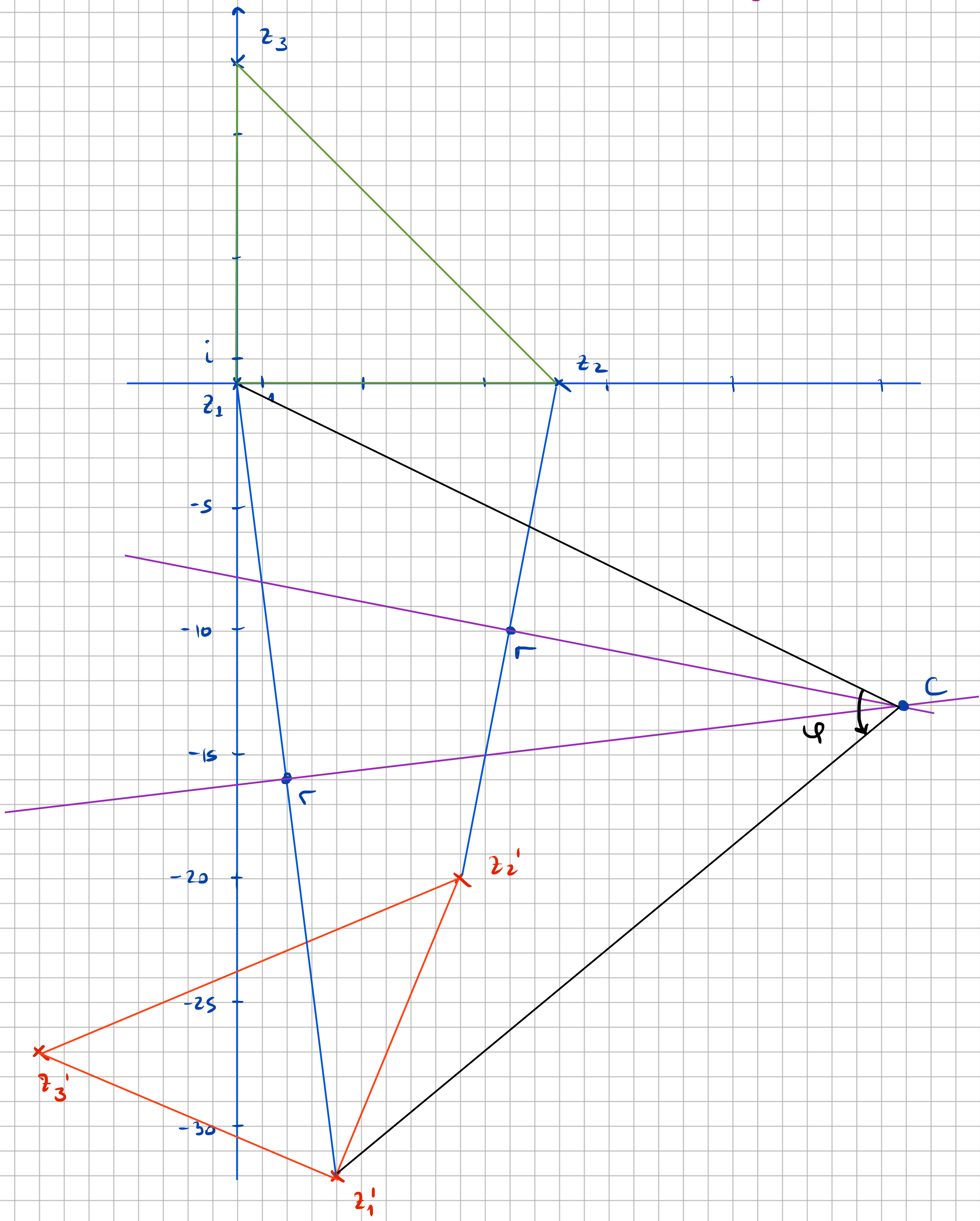
De plus, $a = \frac{1}{13}(5+12i)$, donc $\cos(\varphi) = \frac{5}{13}$

$\Rightarrow \varphi \cong 67{,}38°$.

C'est une rotation de centre $26-13i$ et d'angle $\varphi \cong 67{,}38°$.

b) On calcule $f(0) = 4-32i$, $f(13) = 5+12i+4-32i =$
$= 9-20i$ et $f(13i) = 5i-12+4-32i = -8-27i$.

Le centre de rotation est sur la médiatrice de $z_1 z_1'$ et sur celle de $z_2 z_2'$



z_3
i
1
z_1
z_2
-5
-10
r
C
φ
-15
r
-20
z_2'
-25
z_3'
-30
z_1'

Problème 5

a) $P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$

$f'(x) = -6\sin(6x)$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$

$f''(x) = -36\cos(6x)$, $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 36$

$f'''(x) = 216\sin(6x)$, $f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$

donc $P_3(x) = -1 + 18 \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2$

b) $P_3\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + 18\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}\right)^2 \simeq -0,9899757602$

$(\cos(3) \cong -0,9899924966)$

Problème 1

a) $m = 322$. Pour le décrypter, il faut calculer $322^{13} \bmod 493$.

13	1	322	287
6	0	154	38
3	1	52	−35
1	1	239	239

Donc

$$322^{13} \equiv \overbrace{322 \cdot 52}^{\equiv 475 \equiv (-18)} \cdot 239 \equiv$$

$$\equiv 135 \bmod 493.$$

b) On décrypte ensuite la signature $s = 287$, en calculant $287 \bmod 493$

$$s = \underbrace{287 \cdot (-35)}_{-185} \cdot 239 \equiv 155 \bmod 493.$$

Pour vérifier l'authenticité, on calcule $155^7 \bmod 437$ et on regarde si c'est égal à 135.

$$155^7 \equiv 155 \cdot \underbrace{155^2}_{-10} \cdot \underbrace{155^4}_{100} \equiv -155\,000 \equiv 135 \quad \bmod 437.$$

Comme $135 = m$, le message est fiable.

Problème 2

Si $n=1$: $1^2-1=0$ et $\frac{(1-1)\cdot 1\cdot 2}{3}=0$

Si $n=2$: $1^2-1+2^2-2=2$ et $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}=2$

Supposons ensuite l'égalité vraie pour n (HR) et calculons

$$1^2-1+2^2-2+\dots+n^2-n+(n+1)^2-(n+1)\overset{HR}{=}$$

$$=\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}+n^2+2n+\cancel{1}-n-\cancel{1}=$$

$$=\frac{1}{3}\left((n-1)\cdot n\cdot(n+1)+3n(n+1)\right)=\frac{1}{3}\left(n(n+1)(\underbrace{n-1+3}_{=n+2})\right)$$

$$=\frac{((n+1)-1)\cdot(n+1)((n+1)+1)}{3}$$ d'où le résultat.

Problème 3

a) On a $\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$, $n \geq 0$

b) Si la suite converge vers L, alors $L = \sqrt{1+L}$

donc $L^2 - L - 1 = 0$

donc $L \in \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$ et comme $L > 0$,

on en déduit que $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) Vérifions que cette suite est croissante.

On définit la fonction f par $f(x) = \sqrt{1+x}$

Comme $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} > 0$ pour tout $x > 1$,

la fonction est croissante.

Comme $u_0 = \sqrt{2} > 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, la suite est croissante.

Montrons qu'elle est majorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ par récurrence sur n.

$u_0 = \sqrt{2} \cong 1{,}41 \leq 1{,}62 \cong \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Si $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \leq$

$\leq \sqrt{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})}$ qui est $\leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) \leq \frac{1}{4}(1+2\sqrt{5}+5) = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$

ce qui est vrai.

La suite est croissante et majorée, elle est donc convergente.

Problème 4

On a $S = \sum_{i=1}^{3000} i = \frac{3000 \cdot 3001}{2} = 4'501'500$

Calculons ensuite la somme des multiples de 7 et de 11 inférieurs à 3000 :

$$S_7 = 7 \cdot \sum_{i=1}^{[3000/7]} i = 7 \cdot \sum_{i=1}^{428} i = 7 \cdot \frac{428 \cdot 429}{2} = 642'642$$

et $S_{11} = 11 \cdot \sum_{i=1}^{[3000/11]} i = 11 \sum_{i=1}^{272} i = 11 \cdot \frac{272 \cdot 273}{2} = 408'408$

Puis la somme des multiples de 77 inférieurs à 3000

$$S_{77} = 77 \cdot \sum_{i=1}^{[3000/77]} i = 77 \cdot \sum_{i=1}^{38} i = 77 \cdot \frac{38 \cdot 39}{2} = 57057.$$

Le résultat cherché est

$$S - S_7 - S_{11} + S_{77} = 3'507'507.$$

Problème 5

a) $u_k = \dfrac{5}{k(k+2)}$ $\quad$ $\left(\text{on a } \lim\limits_{n\to\infty} u_k = 0\right).$

b) On a $\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k+1}\right) = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{\overbrace{k+1-k+1}^{=2}}{(k-1)(k+1)} =$

$= \dfrac{5}{(k-1)(k+1)}$ $\quad$ ou

utiliser plutôt cette version

$\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right) = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{\cancel{k}+2-\cancel{k}}{k(k+2)}\right) = \dfrac{5}{k(k+2)}$

c) $S_k = \underbrace{\dfrac{5}{1\cdot 3}}_{u_1} + \underbrace{\dfrac{5}{2\cdot 4}}_{u_2} + \underbrace{\dfrac{5}{3\cdot 5}}_{u_3} + \ldots + \underbrace{\dfrac{5}{k\cdot(k+2)}}_{u_k} =$

$= \dfrac{5}{2}\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{1}{i} - \sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{1}{i+2}\right) = \dfrac{5}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{1}{i} - \sum\limits_{i=3}^{k+2}\dfrac{1}{i}\right) =$

$= \dfrac{5}{2}\cdot\left(1 + \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{i=3}^{k}\dfrac{1}{i} - \sum\limits_{i=3}^{k}\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}\right) =$

$= \dfrac{5\left(3(k+1)(k+2) - 2(k+2) - 2(k+1)\right)}{4(k+1)(k+2)} = \underbrace{\dfrac{5(3k^2+5k)}{4(k+1)(k+2)}}_{k^e \text{ somme partielle}}$

d) Donc $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \dfrac{15}{4}$

Problème 6

Posons x = nombre de bouteilles, $x \leq 1000$.

$$\begin{cases} x \equiv 23 \bmod 6 \\ x \equiv 2 \bmod 35 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \equiv 5 \bmod 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \bmod 2 \\ x \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$$

$$x \equiv 2 \bmod 35 \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 2 \bmod 5 \\ x \equiv 2 \bmod 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 1 \bmod 2 \\ x \equiv 2 \bmod 3 \\ x \equiv 2 \bmod 5 \\ x \equiv 2 \bmod 7 \end{cases}$$

$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

On résout 1) $105x \equiv 1 \bmod 2 \Rightarrow x_1 = 1$.

2) $\underbrace{70}_{\equiv 1 \bmod 3}x \equiv 1 \bmod 3 \Rightarrow x_2 = 1$.

3) $42x \equiv 1 \bmod 5 \Leftrightarrow 2x \equiv 1 \bmod 5$
$\Rightarrow x_3 = 3$.

4) $\underbrace{30}_{\equiv 2 \bmod 7}x \equiv 1 \bmod 7 \Rightarrow x_4 = 4$.

Donc $x \equiv 1 \cdot 105 \cdot 1 + 2 \cdot 70 \cdot 1 + 2 \cdot 42 \cdot 3 + 2 \cdot 30 \cdot 4 \equiv$

$\equiv 737 \bmod 210 \Rightarrow$ au maximum, il y a

$737 + 210 = $ <u>947 bouteilles</u>.