Problème 1 (19 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-2x^3}{x^2-1}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f, son signe et les équations de ses asymptotes.

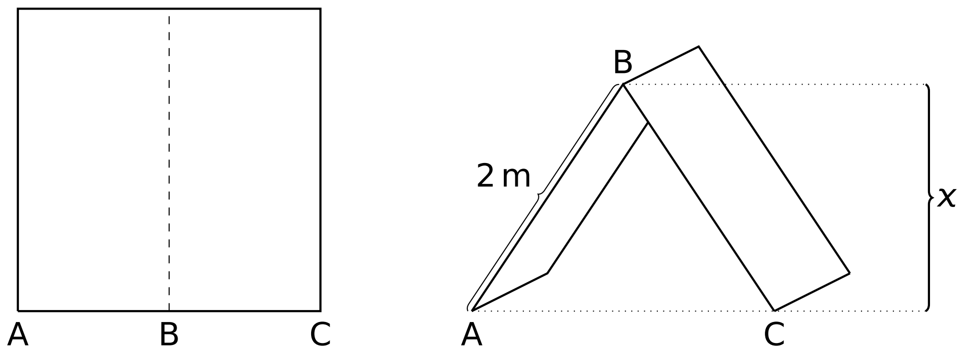
b) Déterminer la croissance de f et les coordonnées des extremums de f.

c) Esquisser le graphe de f **sur la feuille annexe** (page 6).

d) Montrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition. Faire le lien avec le graphe de f.

Problème 2 (11 points)

On désire fabriquer un abri avec une toile carrée ayant une surface de $4\,\text{m} \times 4\,\text{m} = 16\,\text{m}^2$. Cet abri aura la forme d'une tente dont les deux ouvertures seront deux triangles isocèles de hauteur x (voir figure).



a) Montrer que la distance de A à C, une fois l'abri fabriqué, est de $2\sqrt{4-x^2}$.

b) Montrer que le volume V de l'abri en fonction de x est de $V(x) = 4x\sqrt{4-x^2}$.

c) Déterminer la hauteur x de l'abri pour que le carré de son volume soit maximal.

d) En déduire le volume maximal.

Problème 3 (20 points)

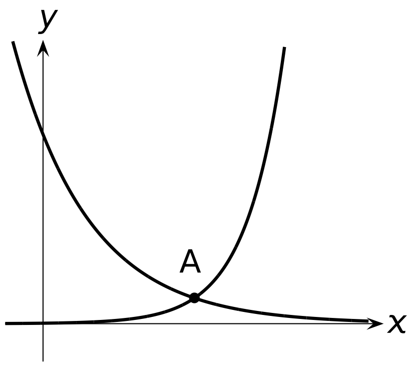
Les questions A, B et C sont indépendantes.

A. Donner les équations des éventuelles asymptotes et les coordonnées des éventuels trous de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$, en justifiant toutes les réponses.

B. On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = e^{2x-6}$ et $g(x) = e^{-x}$, dont les graphes sont représentés ci-dessous.

   i) Déterminer les coordonnées de A, le point d'intersection des graphes des fonctions f et g.

   ii) Calculer l'aire du domaine délimité par la droite d'équation $x = 0$ et les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$.



C. Quelle est l'équation de la tangente au graphe de $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$ au point d'abscisse $a = \frac{\pi}{3}$?

Problème 4 (19 points)

On donne les points A$(7;-5;10)$, B$(8;4;6)$ et C$(3;1;-2)$.

a) Soit π le plan passant par A, B et C. Déterminer une équation cartésienne de π.

b) Soient μ_{AB} le plan médiateur de AB et μ_{BC} celui de BC. Déterminer une équation cartésienne de chacun de ces deux plans.

c) Soit d la droite d'intersection des plans μ_{AB} et μ_{BC}.

   Montrer que le point D$(-1;0;7)$ lui appartient et que $\vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur. Écrire ensuite un système d'équations paramétriques de d.

d) Déterminer les coordonnées des deux points Ω_1 et Ω_2 de la droite d situés à distance $7\sqrt{5}$ du point A (choisir pour Ω_1 la solution dont la première coordonnée est négative). Former ensuite l'équation de la sphère Σ de centre Ω_1 et passant par A, B et C.

e) Déterminer les coordonnées de K, le point d'intersection de la droite d avec le plan π, puis calculer r, le rayon du cercle γ circonscrit au triangle ABC.

Problème 5 (13 points)
Une école réunit 7 enseignants d'art, 24 enseignants de littérature et 19 enseignants de sciences. Chaque enseignant n'enseigne qu'une seule discipline.

Partie A

a) Lors des promotions, tous les enseignants sont assis sur la première rangée. Combien y a-t-il de dispositions possibles si les enseignants d'une même discipline doivent rester ensemble ?

b) Le comité des enseignants est formé de 7 enseignants, chaque discipline étant représentée par au minimum 2 enseignants. Combien y a-t-il de comités possibles ?

c) Pour la journée de l'élégance, il est convenu que tous les enseignants de la même discipline porteront des habits de la même couleur, choisie parmi cinq teintes, à savoir le noir, le blanc, le rouge, le bleu ou le vert.

   i) Combien y a-t-il de possibilités ?

   ii) Même question si chaque discipline doit porter une couleur distincte.

Partie B

À Noël, un enseignant d'art a 70 % de chance de recevoir un cadeau, mais n'en sera satisfait que 3 fois sur 10. Un enseignant de littérature a 50 % de chance de recevoir un cadeau, dont il sera satisfait la moitié du temps. Un enseignant de sciences a 20 % de chance de recevoir un cadeau, dont il sera toujours satisfait.

d) Représenter la situation par un arbre.

e) Vérifier que la probabilité qu'un enseignant reçoive un cadeau dont il est satisfait vaut 22,54 %.

f) Sachant qu'un enseignant est satisfait du cadeau qu'il a reçu, quelle est la probabilité qu'il enseigne la littérature ?

Problème 6 (14 points)

On donne les matrices suivantes

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer P^{-1} la matrice inverse de P.

b) Vérifier que la matrice A donnée par $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ vaut

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Déterminer les valeurs propres de A.

d) Sans faire de calculs, donner une base de chaque espace propre de A.

e) Soit f l'application linéaire dont A est la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Est-ce que f est injective ?

f) Donner une base de l'image de f.

g) Donner les valeurs propres et les espaces propres de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Problème 1 (21 points)
Étudier la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4\,x + 5}{x + 3}$$

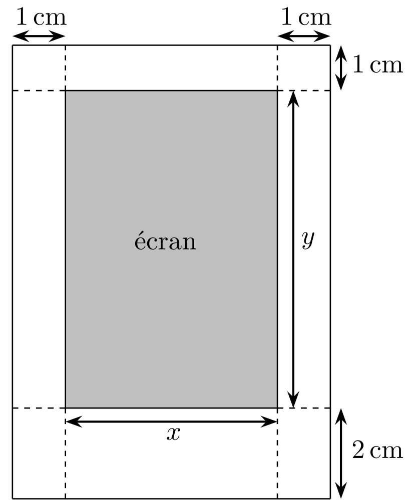
Donner l'ensemble de définition, le signe, les équations des asymptotes, les éventuels points d'intersection avec les asymptotes, la croissance, les coordonnées des points d'extremum puis représenter le graphe **sur la feuille annexe** (page 5).

Problème 2 (10 points)

On veut fabriquer une tablette dont la partie écran a une surface de $54\,\text{cm}^2$ et dont trois des bords ont une largeur de $1\,\text{cm}$, tandis que le quatrième a une largeur de $2\,\text{cm}$.

a) Montrer que la surface du bord peut s'écrire $\mathrm{B}(x) = 3\,x + 6 + \dfrac{108}{x}$.

b) Quelle est la surface totale de la tablette demandant le moins de surface de bord possible ?



Problème 3 (19 points)
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

On donne les fonctions f et g par $f(x) = 2 + \dfrac{2}{x-4}$ et $g(x) = (2\,x - 3)^3$.

a) Montrer que le point $\mathrm{P}(2\,;1)$ est commun aux graphes de ces deux fonctions.

b) Déterminer la valeur de l'angle aigu entre la tangente au graphe de f au point P et la tangente au graphe de g au point P également.

c) Calculer l'aire du domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et les droites verticales d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

Partie B

Soit le domaine limité par les droites verticales d'équation $x = 3$ et $x = 4$, l'axe Ox et le graphe de la fonction f donnée par $f(x) = e^{x-3}$.

Calculer le volume du solide engendré par la révolution de ce domaine autour de l'axe Ox.

Partie C

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin(3\,x)\,dx$. On demande la valeur exacte.

Problème 4 (19 points)
Dans un repère orthonormé, on considère les points A(0; 0; 1), B(0; 1; 0), et C(1; 1; 1).

a) Montrer que les points A, B et C forment un triangle équilatéral.
b) Déterminer une équation cartésienne de π_{ABC}, le plan contenant les points A, B et C.

Soit encore la sphère Σ d'équation

$$x^2 - 4\,x + y^2 + 6\,y + z^2 + 6\,z = 5$$

c) Déterminer les coordonnées du centre D et le rayon R de la sphère Σ.
d) Montrer que Σ est tangente à π_{ABC}.
e) Déterminer les coordonnées de T, le point de tangence de π_{ABC} et de Σ.

Soit finalement le point E(3; −3; 1).

f) Déterminer les coordonnées de E′, le symétrique de E par rapport au plan π_{ABC}.
g) Les points à une distance de 4 de E et de E′ forment un cercle γ. Déterminer les coordonnées du centre Ω et le rayon r du cercle γ.

Problème 5 (19 points)
Christian prend régulièrement le train pour se rendre au travail. Il fait les observations suivantes.

— La probabilité qu'il y ait un contrôleur dans le train est seulement de 10 %.

— Même quand il y a un contrôleur, Christian échappe au contrôle une fois sur quatre.

Fort de ces constats, il décide de jeter un dé à 6 faces bien équilibré avant de prendre le train et de ne s'acheter un billet que si le résultat du lancer est 6.

a) Montrer que la probabilité que Christian se fasse contrôler est de $\frac{3}{40}$.

b) Quelle est la probabilité qu'il ne prenne pas de billet et ne se fasse pas contrôler ?

c) Quelle est la probabilité qu'il se fasse contrôler sans billet si l'on sait que le résultat du lancer de dé est un nombre pair ?

d) Quelle est la probabilité qu'il se fasse contrôler au maximum 2 fois en 30 trajets ?

e) Combien de fois doit-il prendre le train pour que la probabilité de se faire contrôler au moins une fois soit supérieure à 80 % ?

Problème 6 (23 points)
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ est donnée par sa matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 7 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

a) Calculer l'image de $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ par f.

b) Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.

Partie B

Une application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est donnée par $g(x; y) = (3\,x + 2\,y\,; k\,x - y)$.

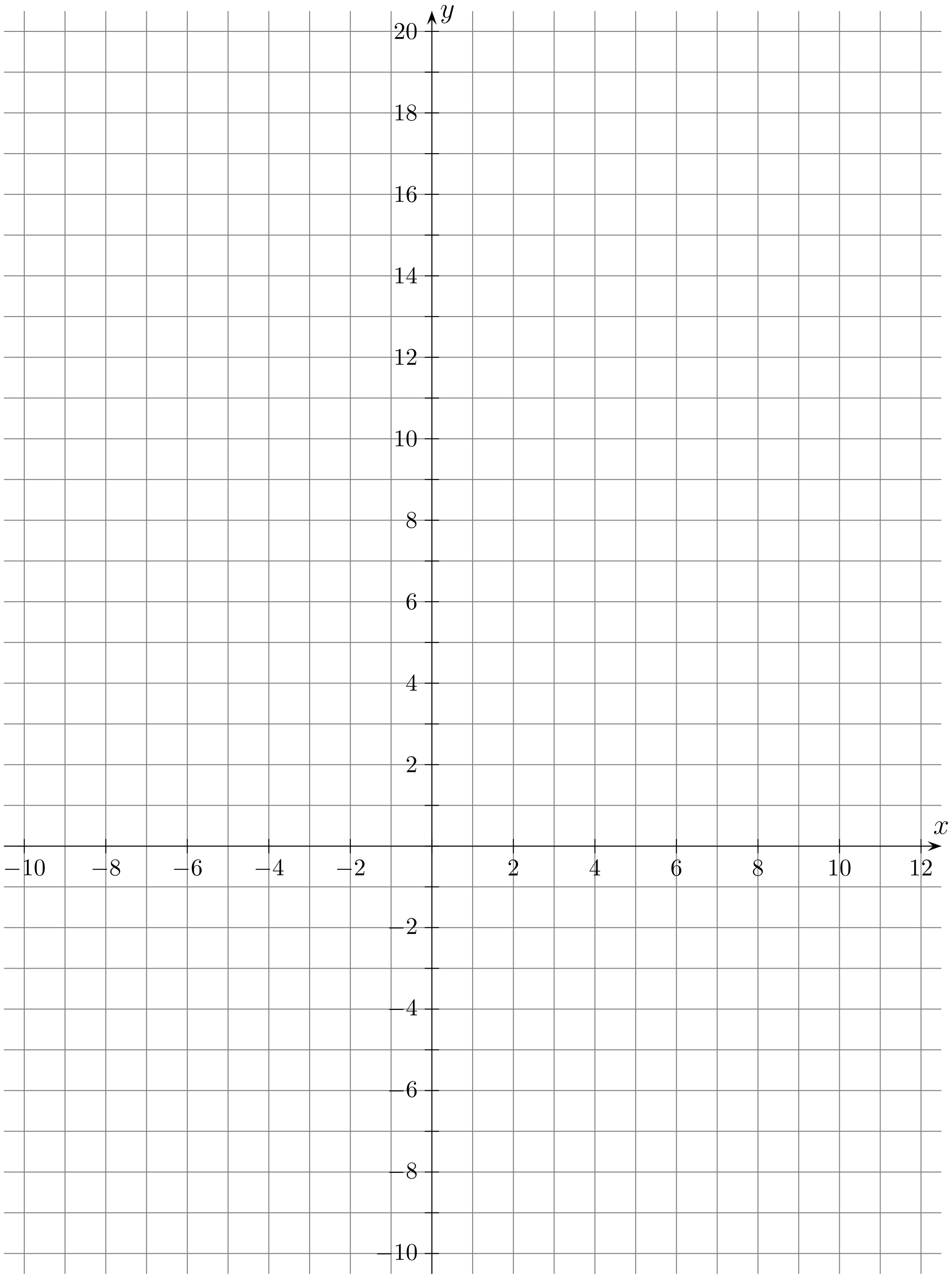
c) Pour quelles valeurs de k, l'application g est-elle inversible ?

d) Pour quelles valeurs de k, l'application g est-elle diagonalisable ?

e) Si $k = 6$, calculer les valeurs propres et les espaces propres respectifs de g.

Nom, prénom : ______________________

Annexe du problème 1



Problème 1 (27 points)

Soit la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{2\,x^2 - 12\,x + 18}{x^2 + 2\,x - 3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition, le(s) zéro(s) et le signe de f.

b) Trouver les équations des asymptotes de f et déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection du graphe de f avec ses asymptotes.

c) Montrer que $f'(x) = \dfrac{16\,(x^2 - 3\,x)}{(x^2 + 2\,x - 3)^2}$, puis étudier la croissance de f et préciser les coordonnées des points qui correspondent à ses extremums.

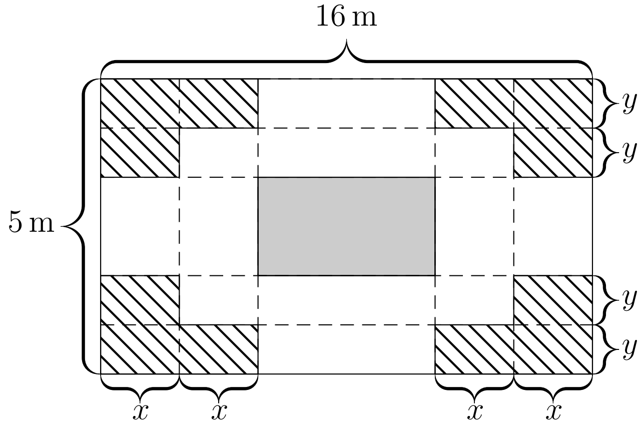
d) Esquisser soigneusement le graphe de f **sur la feuille annexe** (page 4).

e) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $a = -1$.

Problème 2 (10 points)

Un jardinier souhaite aménager un jardin à la française composé de roses blanches et de roses rouges, selon le plan ci-contre, où les roses rouges occupent la partie centrale en gris, et les roses blanches les parties hachurées dans les coins.

Il souhaite que la surface occupée par les roses blanches soit de $15\,\mathrm{m}^2$. Pour quelles valeurs de x et y la surface de jardin occupée par toutes les roses est-elle maximale ?



Problème 3 (13 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

a) Calculer les deux limites suivantes.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3\,x} - 1}{2\,x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x - 3}$$

b) Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes $y = x^2 + 4\,x + 2$ et $y = 5\,x + 4$ (il n'est pas demandé de représenter le domaine).

Problème 4 (19 points)

Dans un repère orthonormé, on donne les points $\mathrm{A}(-6\,;-4\,;0)$ et $\mathrm{B}(0\,;-1\,;3)$ ainsi que la sphère Σ d'équation $x^2 + 4\,x + y^2 + 4\,y + z^2 + 2\,z = 0$.

a) Donner les équations paramétriques de la droite d passant par les points A et B.

b) Donner le centre C et le rayon r de la sphère Σ.

c) Déterminer les points d'intersection T_1 et T_2 de la droite d avec la sphère Σ.

d) Déterminer les équations des plans tangents à la sphère Σ en ces points.

e) Donner les équations paramétriques de la droite d'intersection de ces deux plans.

f) Montrer que le plan π d'équation $2\,x + y - 5\,z + 16 = 0$ coupe la sphère Σ. Donner le centre C' et le rayon r' du cercle formé par l'intersection du plan π avec la sphère Σ.

Problème 5 (18 points)
Dans le jeu Candy Crush, on distingue trois types de niveaux :

— les niveaux faciles ;

— les niveaux difficiles ;

— les niveaux cauchemardesques.

Un joueur expérimenté réussit toujours un niveau facile, 7 fois sur 10 un niveau difficile et 1 fois sur 10 un niveau cauchemardesque.
Un joueur novice, par contre, réussit 4 fois sur 5 un niveau facile, 3 fois sur 10 un niveau difficile et ne réussit jamais un niveau cauchemardesque !

Un championnat est organisé. Des niveaux sont proposés aléatoirement à une équipe de 5 joueurs parmi lesquels figurent 2 joueurs expérimentés et 3 joueurs novices.
Il y a 8 niveaux faciles, 5 niveaux difficiles et 2 niveaux cauchemardesques.

Un joueur est d'abord tiré au sort et joue pour toute l'équipe, puis l'un des 15 niveaux est choisi au hasard.

a) Représenter la situation par un arbre.

b) Vérifier que la probabilité que l'équipe réussisse un niveau vaut 62,8 %.

c) Quelle est la probabilité que l'équipe ait réussi si l'on sait que le niveau tiré au sort était cauchemardesque ?

d) L'équipe n'a pas réussi le niveau. Quelle est la probabilité que ce soit un joueur novice qui ait été tiré au sort ?

Le but de la compétition est de réussir un maximum de niveaux en 10 tentatives. Les conditions initiales s'appliquent à chaque fois : il y a toujours 15 niveaux qui peuvent être sélectionnés, et un joueur qui a déjà été sélectionné peut être à nouveau tiré au sort pour jouer le niveau suivant.

e) Calculer la probabilité qu'une équipe réussisse exactement 7 niveaux.

f) Calculer la probabilité qu'une équipe réussisse au moins un niveau.

Problème 6 (16 points)
Les questions a) et b) sont indépendantes l'une de l'autre.

a) On donne l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & k-1 & 3 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

i) Pour quelles valeurs de k l'application f est-elle bijective ?

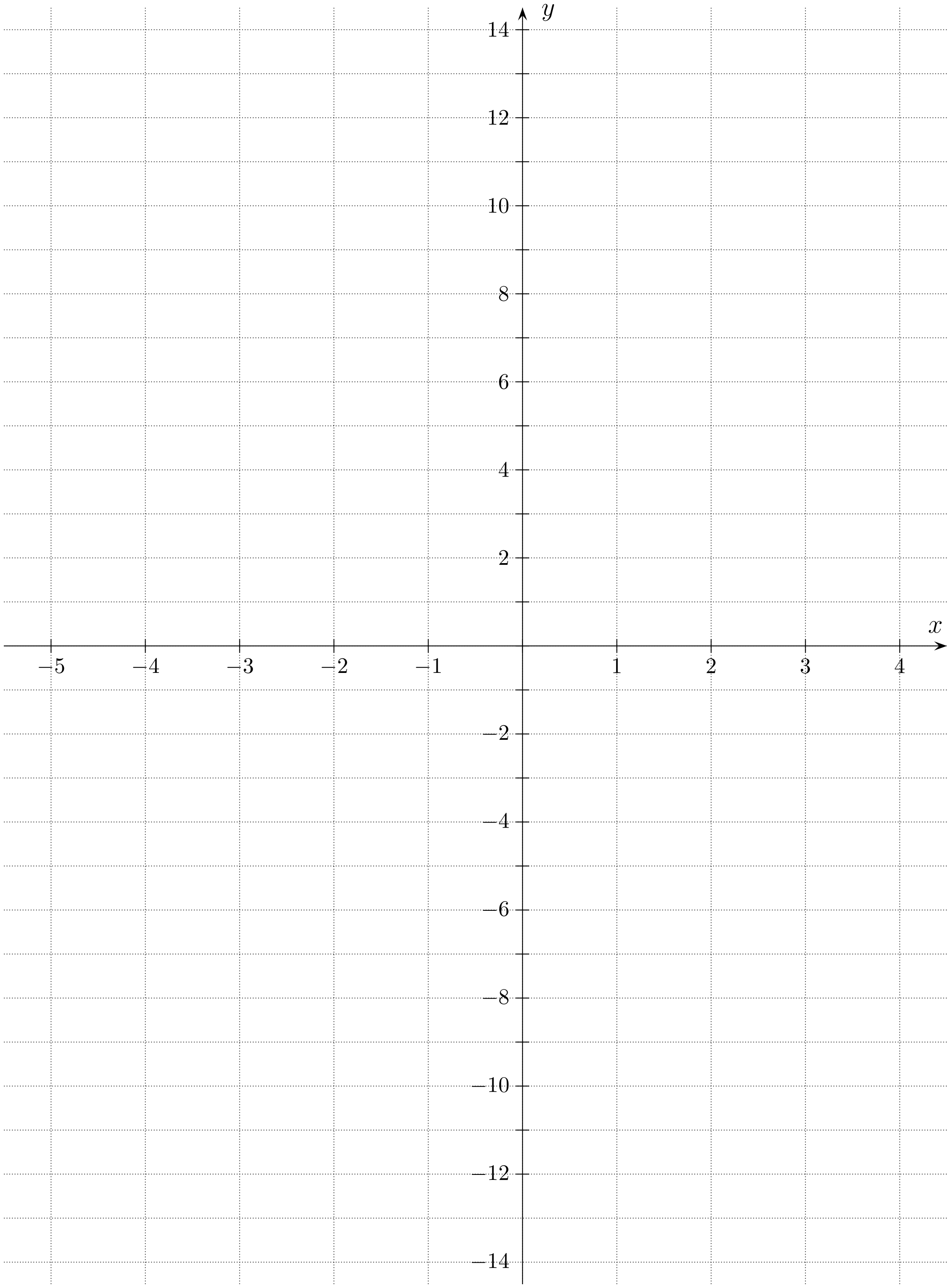
ii) On pose $k = 1$. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie orthogonale relativement à la droite d'équation $3\,x - y = 0$. Quelle est la matrice associée à f relativement à la base canonique ?

Indication : donner deux vecteurs dont les images sont évidentes.

Nom, prénom : ____________________

Annexe du problème 1



Problème 1 (22 points)

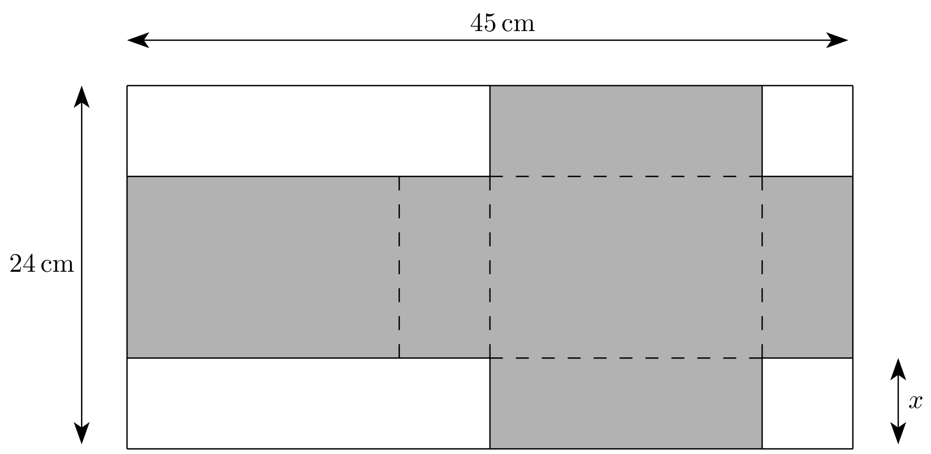
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{4x^2 + 5x}$.

On demande : l'ensemble de définition, le signe de f, les équations des éventuelles asymptotes verticales et horizontales, la croissance de f, les coordonnées des extremums de f et le graphe de f **sur la feuille annexe** (page 4).

Problème 2 (9 points)

Un artisan fabrique des boîtes en forme de parallélépipède rectangle à partir de feuilles cartonnées longues de 45 cm et larges de 24 cm. Il y découpe le chablon suivant.

Attention, ce croquis ne respecte pas les proportions !



a) Montrer que si x vaut 2 cm, le volume de la boîte fabriquée est de 820 cm^3.

b) Donner $\mathrm{V}(x)$, l'expression du volume de la boîte en fonction de x.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de x le volume est-il maximal ? Justifier.

Problème 3 (12 points)

On considère la fonction $f: \;]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x + \dfrac{5}{x}$.

a) Calculer l'aire de la surface délimitée par le graphe de f et la droite d'équation $y = 6$.

b) Calculer le volume de révolution autour de Ox du domaine délimité par le graphe de f et les droites $x = 1$ et $x = 2$.

c) Donner l'équation de l'asymptote oblique de f.

Problème 4 (11 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

a) Considérons les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x} - 1$.

Montrer que leurs graphes se coupent à angle droit en leur point d'abscisse 1.

b) Les cercles d'équations

$$\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 6\,x - 10\,y = 2 \quad \text{et} \quad \Gamma_2 : (x-5)^2 + (y-8)^2 = 4$$

sont-ils confondus, sécants, tangents (intérieurement ou extérieurement) ou disjoints ? Justifier.

Problème 5 (15 points)
On donne les plans $\alpha : 2\,x + 2\,y + z - 39 = 0$ et $\beta : -x + 2\,y + 2\,z - 28 = 0$, ainsi que les points $A(4\,;-3\,;-11)$ et $B(1\,;18\,;16)$.

a) Calculer l'angle aigu entre les plans α et β.

b) Donner une équation cartésienne du plan perpendiculaire aux plans α et β passant par le point A.

c) i) Déterminer des équations cartésiennes des plans bissecteurs des plans α et β.
   ii) Donner une équation cartésienne de l'une des deux sphères tangentes aux plans α et β, dont le centre se situe sur la droite passant par les points A et B.

Problème 6 (14 points)
Neuf pièces de monnaie sont pipées de sorte que la probabilité d'obtenir pile vaut deux tiers.

a) On lance les neuf pièces. Calculer la probabilité d'obtenir sept fois pile et deux fois face.

On ajoute une dixième pièce équilibrée aux neuf pièces pipées.

b) On choisit une pièce au hasard et on la lance.
   i) Calculer la probabilité d'obtenir face.
   ii) Calculer la probabilité qu'il s'agisse de la pièce équilibrée, sachant qu'on a obtenu face.

c) On lance deux pièces prises au hasard parmi les dix. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois pile.

Problème 7 (20 points)
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par sa matrice (relativement à la base canonique) ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Donner une base du noyau de f et une base de l'image de f.

b) Donner une matrice P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$.

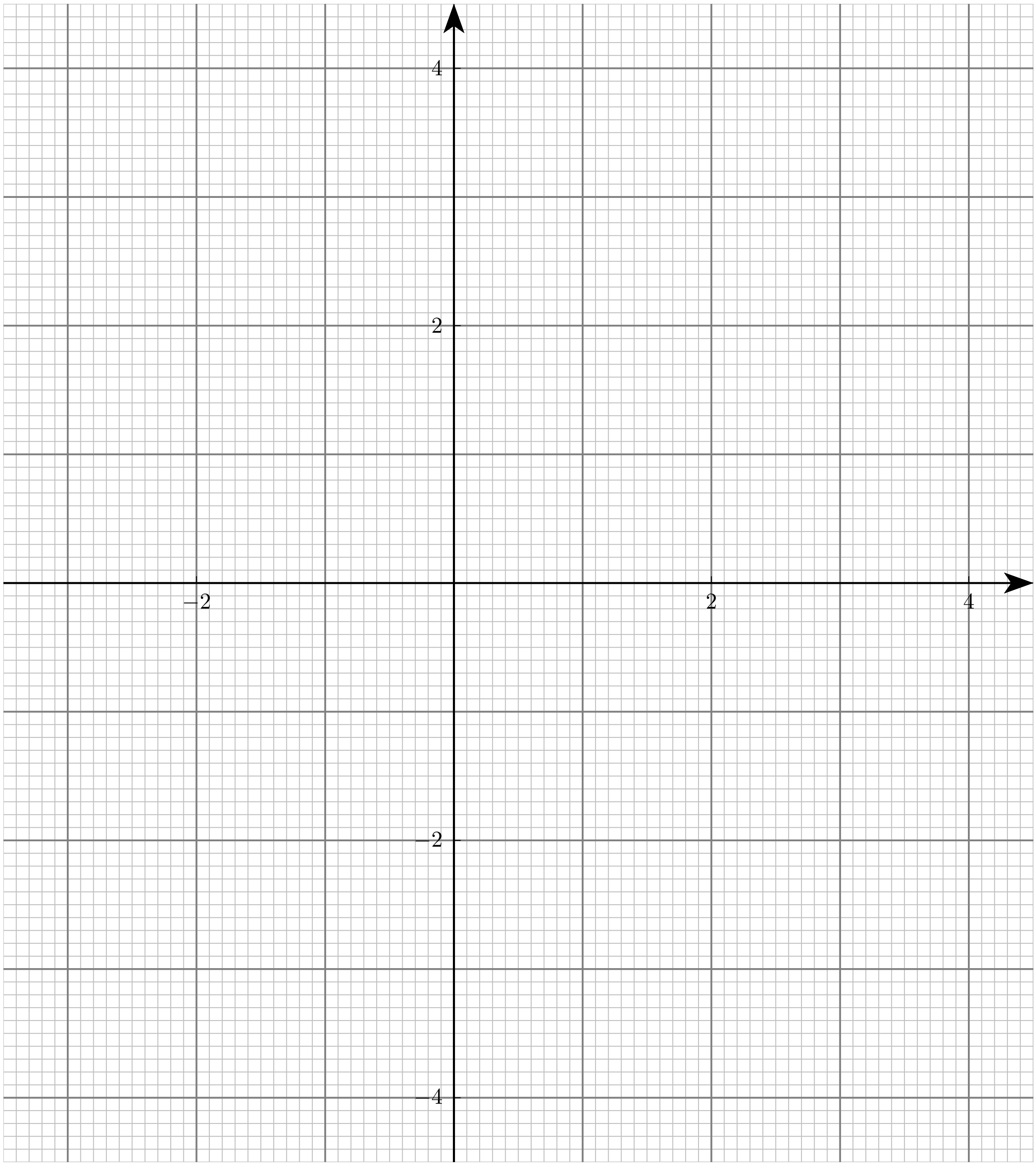
c) Quelle est la nature géométrique de f ?

d) Calculer A^2.

e) Donner les valeurs propres et les espaces propres de A^n, pour $n \geqslant 1$.

Nom, prénom : ____________________

Annexe du problème 1



Problème 1 (23 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3\,x^3 - 6\,x}{x^2 - 3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f, son signe et les équations de ses asymptotes.

b) Vérifier que la dérivée de f est donnée par l'expression $f'(x) = \dfrac{3\,(x^2-6)\,(x^2-1)}{(x^2-3)^2}$.

c) Déterminer la croissance de f et les coordonnées des extrema de f.

d) Sur une nouvelle page, esquisser le graphe de f à l'échelle 1 unité = 2 carrés = 1 cm.

Problème 2 (14 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

a) Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(x).$$

Esquisser leur graphe sur l'intervalle $[0; 2\,\pi]$. Déterminer l'aire de la région limitée par les courbes $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ et $x = \pi$ (on demande la valeur exacte).

b) Déterminer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la région limitée par les courbes

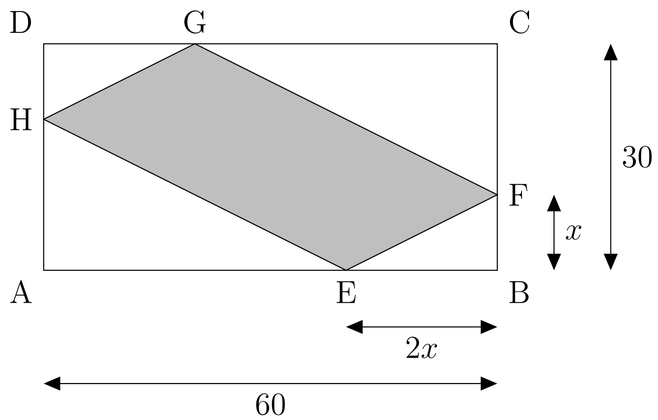
$$y = 5 - x^2 \quad \text{et} \quad y = 1$$

autour de l'axe des x (on demande la valeur exacte).

Problème 3 (8 points)

Le parallélogramme EFGH est inscrit dans un rectangle ABCD de dimensions 30 cm × 60 cm de sorte que BE = 2BF. On pose x = BF et $2x$ = BE.

Quelle est l'aire maximale de ce parallélogramme ? Que vaut alors x ? Justifier.



Problème 4 (14 points)
Relativement à un repère orthonormé de l'espace, on considère :

- Les points A$(-3;1;3)$, B$(0;3;1)$ et C$(1;1;-1)$;
- La droite d d'équation paramétrique :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan passant par les points A, B et C.

b) Montrer que le point A$'(-1;-1;7)$ est le symétrique de A par rapport à d. Donner l'équation cartésienne de la sphère Σ_1 de centre A$'$ et de rayon 4.

c) On considère les plans d'équation

$$x + 2y - 2z - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad 2x - y + 2z + 1 = 0$$

Déterminer l'équation de la sphère Σ_2 tangente simultanément aux plans ci-dessus et dont le centre appartient à la droite d.

d) Quelle est la position relative de Σ_1 par rapport à Σ_2 ?

Problème 5 (17 points)
La plupart des articles commercialisés sont identifiés par un code à 13 chiffres traduit sous forme de code-barres pour la saisie informatique.

Le dernier chiffre est une clef de contrôle qui permet de détecter les éventuelles erreurs de saisie par des humains ou par des capteurs électroniques.

D'après les données statistiques, les erreurs de saisie se répartissent **exclusivement** selon les types ci-dessous :

- un seul chiffre faux : 60%,
- inversion de deux chiffres : 10%,
- ajout ou oubli d'un chiffre : 30%.

La clef de contrôle détecte toute erreur portant sur un seul chiffre. L'inversion de deux chiffres est détectée 8 fois sur 9, un mauvais nombre de chiffres 9 fois sur 10.

Pour la suite, nous nous intéressons uniquement aux cas où une erreur s'est produite.

a) Représenter la situation par un arbre.

b) Vérifier que la probabilité qu'une erreur soit détectée vaut $95{,}\overline{8}\%$.

c) La clef de contrôle a détecté une erreur, quelle est la probabilité qu'un seul des chiffres saisis soit faux ?

d) Sachant que le code saisi a le bon nombre de chiffres, quelle est la probabilité que la clef de contrôle détecte une erreur ?

On vérifie dix codes à l'aide de la clef de contrôle.

e) Calculer la probabilité que la clef de contrôle détecte exactement huit codes présentant une erreur.

f) Calculer la probabilité que la clef de contrôle ne détecte pas d'erreur sur au moins l'un des dix codes.

Problème 6 (15 points)
On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par sa matrice A (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$) ci-dessous :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de A et montrer que les valeurs propres sont 0 et -1.

b) Donner une base des espaces propres E_0 et E_{-1} (associés respectivement aux valeurs propres 0 et -1).

c) Déterminer une matrice P telle que la matrice $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit diagonale. Donner alors la matrice A'.

d) Donner les valeurs propres de la matrice A^2 et interpréter géométriquement l'application $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.