Problème 1 (9 points)
Le gymnase de Chamblandes a organisé une journée de ski pour ses élèves. Certains élèves ne sont pas venus et le doyen responsable souhaite connaître le nombre exact d'élèves présents à la sortie.

Une enseignante de mathématiques lui donne les informations suivantes.

- Les bus loués possédaient 77 places passagers réservées aux élèves. Les premiers bus étaient complets et le dernier ne contenait que 46 élèves.
- Pour atteindre le domaine skiable, les élèves ont pris une télécabine à 35 places. Les premières étaient entièrement occupées et la dernière ne comptait que 18 élèves.
- Finalement, les élèves ont pris place sur des télésièges à 3 places. Un élève, parti devant, est monté tout seul. Puis tous les télésièges ont été occupés par des élèves et il n'y avait aucune place libre.

a) Montrer que le doyen va devoir résoudre le système de congruences suivant.

$$\begin{cases} x \equiv 4 \mod 7 \\ x \equiv 2 \mod 11 \\ x \equiv 3 \mod 5 \\ x \equiv 1 \mod 3 \end{cases}$$

b) Sachant que le gymnase de Chamblandes compte 750 élèves, combien parmi ceux-ci ont participé à la journée de ski ?

Problème 2 (12 points)
Astrid veut envoyer le message $m = 25$ à Basile en le cryptant à l'aide du système RSA.

La clé publique d'Astrid est composée de $n_{\mathrm{A}} = 851$ et $e_{\mathrm{A}} = 5$; celle de Basile de $n_{\mathrm{B}} = 253$ et $e_{\mathrm{B}} = 3$.

a) Quel message codé Astrid va-t-elle envoyer à Basile ?

b) Afin d'augmenter la sécurité, elle décide de signer son message. Quelle signature codée va-t-elle lui envoyer ?

Problème 3 (10 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie de manière récursive par

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{u_n^2}{4} \end{cases} .$$

a) Calculer les termes u_2 et u_3.

b) Démontrer que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

c) Montrer que la suite est monotone.

d) En déduire que la suite est convergente et calculer sa limite.

Problème 4 (8 points)

Étudier la convergence des séries suivantes.

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{6} + 1 + \ldots + \left(\dfrac{3\,k-1}{2\,k+2}\right)^k + \ldots$

b) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{3^2}{2\cdot 5^2} + \dfrac{3^3}{3\cdot 5^3} + \ldots + \dfrac{3^k}{k\cdot 5^k} + \ldots$

c) $1 - \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5} + \ldots + (-1)^{k+1}\cdot\dfrac{k+1}{k^2+1} + \ldots$

Problème 5 (9 points)

a) Estimer $\sqrt{2}$ en utilisant le polynôme de Taylor de degré 3 de la fonction $f(x) = \sqrt{x+1}$ au voisinage de $a = 0$.

b) Évaluer l'erreur commise dans le calcul précédent.

Problème 6 (19 points)

Résoudre les équations différentielles suivantes.

a) $(2\,x-1)\,y' = \dfrac{y}{2\,x+1}$

b) i) $y'' - 2\,y' + 5\,y = 0$.

ii) $y'' - 2\,y' + 5\,y = 12\,xe^x$.

Résoudre le problème aux valeurs initiales ci-dessous.

iii) $y'' - 2\,y' + 5\,y = 12\,xe^x, \quad y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Problème 1 (16 points)
Les pièces de 20 centimes d'euro ont un diamètre de 22,25 mm et celles de 50 centimes un diamètre de 24,25 mm. En alignant de telles pièces, peut-on obtenir une longueur de

a) 100 mm ?

b) 10 000 mm ?

Si oui, quelle est, dans chaque cas, la solution la plus économique ?

Problème 2 (13 points)
Devenu adulte, le Petit Poucet a une collection de cailloux parfaitement symétriques. Il ne sait pas combien il en a mais il remarque qu'en les groupant par tas de 21 il en reste 12 tout seuls. En faisant des tas de 32 il en reste 29 tout seuls. Et en faisant des tas de 55 il en reste 22 tout seuls. Combien peut-il avoir de cailloux (on demande toutes les solutions) ? Et au minimum ?

Problème 3 (9 points)
On désire crypter le message $m = 2024$ à l'aide de la clé publique (n, e) où $n = 953 \cdot 727$ et $e = 5$.

a) Pourquoi la clé de décryptage d vérifie-t-elle l'égalité suivante ?

$$d \equiv 5^{168\ 959} \bmod 691\ 152$$

Il n'est pas demandé de calculer d. Ce calcul donne $d = 276\ 461$.

b) Vérifier (par calcul) que

$$2024^5 \equiv 552\ 399 \bmod 692\ 831.$$

c) En déduire (en justifiant) combien vaut

$$552\ 399^{276\ 461} \bmod 692\ 831.$$

Problème 4 (12 points)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie de manière récursive par

$$\begin{cases} u_1 &= 3 \\ u_{n+1} &= \sqrt{4\,u_n + 20} \end{cases}$$

a) Calculer les quatre premiers termes u_1, u_2, u_3, u_4 de la suite (arrondir à deux décimales).

b) Démontrer par récurrence que la suite est croissante et majorée par 7.

c) Calculer la limite de la suite lorsque n tend vers l'infini.

Problème 5 (6 points)
Étudier la convergence de la série alternées suivante. Dans le cas de convergence, dire si la série est absolument convergente ou semi-convergente.

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{14} + \frac{1}{21} - \frac{1}{28} + \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{7k} + \ldots$$

Problème 6 (6 points)
Déterminer le polynôme de Taylor de degré 2 de la fonction $f(x) = e^x \cos(x)$ au voisinage de $a = 1$.

Problème 1 (12 points)
Le prix d'entrée au théâtre est de 18 fr. pour les adultes et de 7,50 fr. pour les enfants.
Si le total des entrées s'élève à 900 fr., combien de personnes ont assisté à la représentation, sachant qu'il y avait davantage d'adultes que d'enfants ? Donner toutes les solutions.

Problème 2 (11 points)
Trouver un entier compris entre 9000 et 10 000 qui donne un reste de 9 lorsqu'on le divise par 10 ou 11 et qui est divisible par 13.

Problème 3 (15 points)
Alice a pour clé publique $n_{\mathrm{A}} = 493$, $e_{\mathrm{A}} = 5$. Elle veut envoyer le message $m = 33$ à Bob dont la clé publique est $n_{\mathrm{B}} = 247$, $e_{\mathrm{B}} = 11$. Quel message codé et quelle signature codée lui adresse-t-elle ?

Problème 4 (11 points)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de manière récursive par

$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{5\,u_n + 14} \ , n \geqslant 1 \end{cases} .$$

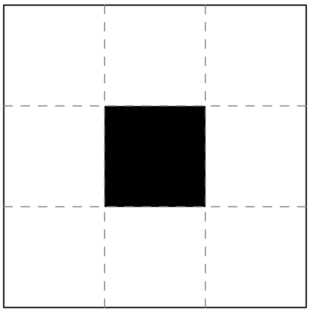
a) Calculer u_2, u_3 et u_4.

b) Démontrer que cette suite est croissante.

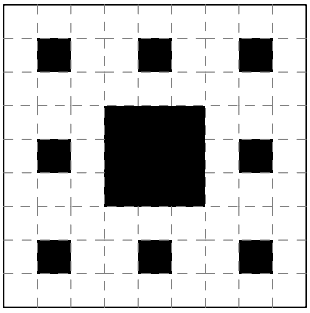
c) Démontrer que 7 est un majorant de cette suite.

d) Justifier que cette suite converge et calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

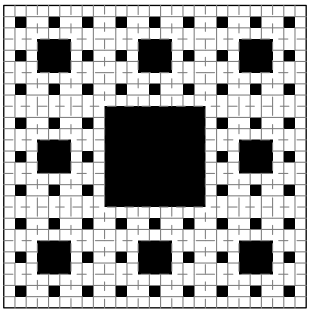
Problème 5 (10 points)
Un carré de côté 1 est divisé en 9 carrés égaux. Le carré du centre est noirci. On note u_1 l'aire du carré noirci.
Ensuite, chacun des 8 carrés restants est divisé en 9 carrés égaux, et chaque fois le carré du centre est noirci. On note u_2 la somme des aires des carrés noircis, après cette deuxième division.
On continue ainsi, indéfiniment, et on note u_n la somme des aires des carrés noircis, après n divisions.



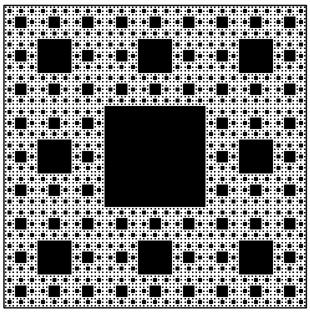
$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$



n grand

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Vérifier que $u_3 = \frac{217}{729}$.

c) Définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manière récursive.

d) Donner une expression pour u_n, où $n \in \mathbb{N}^\star$.

e) Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Problème 6 (13 points)
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de manière récursive par

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_1 = 21 \\ u_{n+1} = 2\,u_n + 8\,u_{n-1} + 9 \ \ , n \geqslant 1 \end{cases}.$$

a) Trouver une expression pour le terme de rang n, où $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer u_2 de deux manières différentes.

Problème 1 (11 points)
Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 6 \mod 14 \\ x \equiv 12 \mod 15 \\ x \equiv 16 \mod 17 \end{cases}$$

Problème 2 (10 points)
Herlock et Atson ont pris l'habitude d'utiliser le système RSA pour se transmettre diverses informations. La clé publique d'Atson est (589 ;7). Herlock envoie à Atson le message 61 pour lui communiquer le numéro de Backer Street auquel ils doivent se retrouver.

Déchiffrer le message. Où est fixé le rendez-vous ?

Problème 3 (17 points)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + y' - 12\,y - 65\,\sin(2\,x) = 0$

b) $(4\,x^2 + 1) \cdot y' = (1 + 4\,x)y$

Problème 4 (11 points)
Soit l'application $f\,:\,\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \frac{1}{13}\,(5 + 12i)\,z + 4 - 32i.$$

a) Vérifier que f correspond à une isométrie et déterminer le type de cette dernière. Préciser ses éléments caractéristiques (vecteur s'il s'agit d'une translation, centre et angle s'il s'agit d'une rotation, axe s'il s'agit d'une symétrie et enfin axe de symétrie et vecteur s'il s'agit d'un renversement sans point fixe).

b) On donne les nombres $z_1 = 0$, $z_2 = 13$ et $z_3 = 13i$. Calculer $z_1' = f(z_1)$, $z_2' = f(z_2)$ et $z_3' = f(z_3)$, puis reporter ces six valeurs sur la figure annexée. Déterminer ensuite graphiquement les éléments caractéristiques de l'isométrie (sans faire usage des résultats obtenus à la partie précédente).

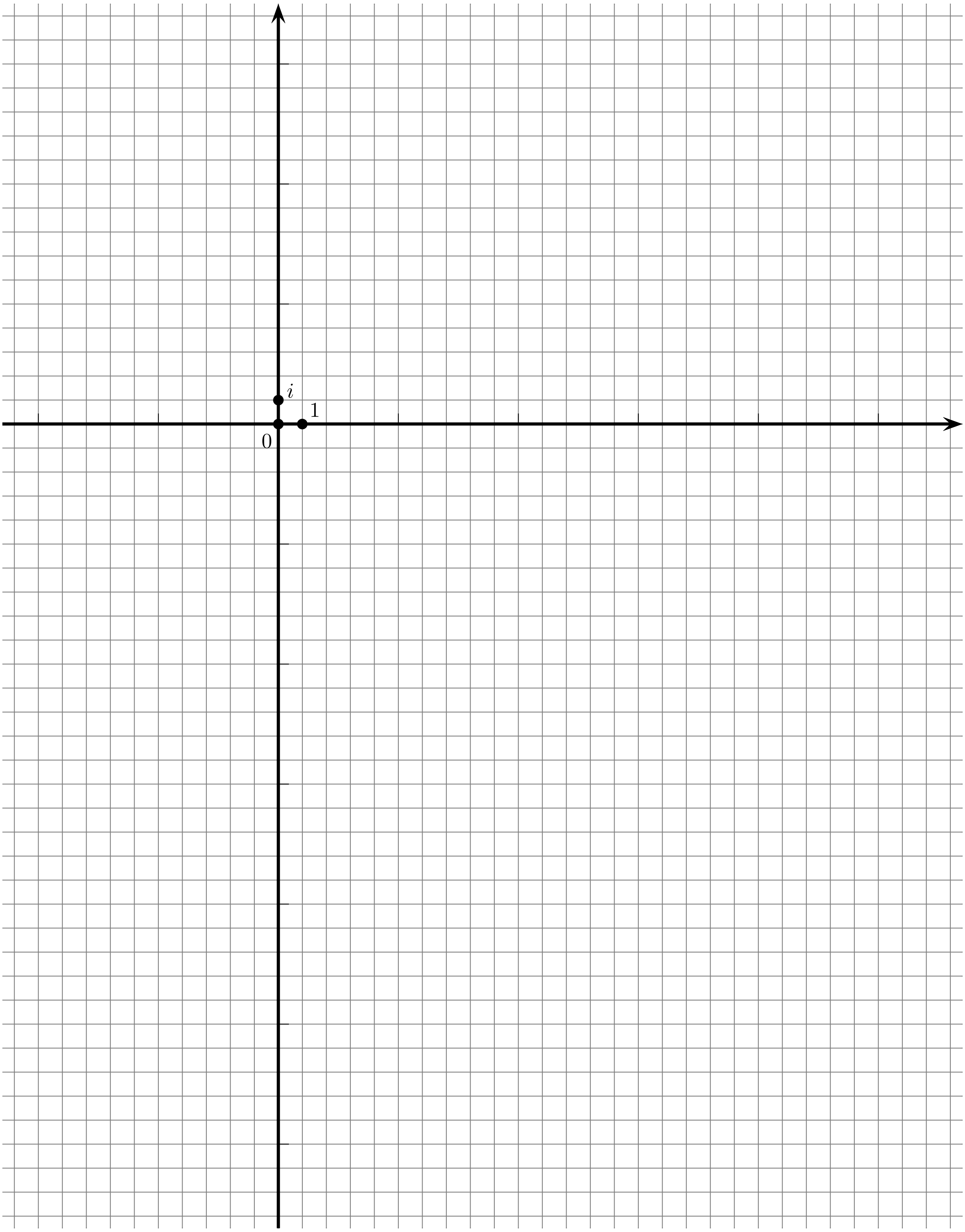
Problème 5 (6 points)

a) Déterminer le polynôme de Taylor de degré 3 de la fonction $f(x) = \cos(6\,x)$ au voisinage de $a = \frac{\pi}{6}$.

b) Utiliser le résultat précédent pour estimer $f(\frac{1}{2}) = \cos(3)$.

Nom, prénom : ____________________

Annexe du problème 4



Problème 1 (15 points)
Un messager livre au service de renseignement Vert le message 322 signé 287.

Selon les dires du messager, ce message émanerait de l'unité Rouge infiltrée dans le pays Bleu ; il contiendrait le nombre de supers ordinateurs de l'armée bleue.

Avant de livrer le message au président, il s'agit

a) de le décrypter à l'aide de la clé secrète du service de renseignement Vert ($n = 493; p = 17; q = 29; e = 69; d = 13$) ;

b) de vérifier son authenticité à l'aide de la clé de l'unité Rouge ($n_{\mathrm{R}} = 437; e_{\mathrm{R}} = 7$).

Problème 2 (8 points)
Démontrer par récurrence la relation pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1^2 - 1 + 2^2 - 2 + 3^2 - 3 + \cdots + n^2 - n = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}.$$

Problème 3 (17 points)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est suggérée par

$\sqrt{2}\,;\quad \sqrt{1+\sqrt{2}}\,;\quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}\,;\quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}\,;\quad \ldots$

a) Définir cette suite par une relation de récurrence.

b) Sachant que la suite est convergente, calculer sa limite.

c) Montrer que la suite est convergente.

Problème 4 (9 points)
Trouver la somme de tous les nombres entiers de 1 à 3000 qui ne sont multiples ni de 7, ni de 11.

Problème 5 (10 points)
On considère la somme $\dfrac{5}{1\cdot 3} + \dfrac{5}{2\cdot 4} + \dfrac{5}{3\cdot 5} + \dfrac{5}{4\cdot 6} + \cdots$

a) Quel est le terme général de cette série ?

b) Vérifier que $\dfrac{5}{k(k+2)} = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right)$.

c) Calculer la k^{e} somme partielle s_k de cette série.

d) En déduire qu'elle converge et calculer sa somme.

Problème 6 (15 points)
Un restaurateur vient de recevoir sa commande de vin : 23 bouteilles *réserve spéciale* ainsi qu'un grand nombre de cartons de 6 bouteilles. Il désire ranger toutes les bouteilles commandées dans des casiers qui peuvent contenir chacun 35 bouteilles.
Après avoir rempli ses étagères, il réalise qu'il lui reste deux bouteilles qu'il offre au livreur pour le remercier de l'avoir aidé.
Combien de bouteilles le restaurateur a-t-il commandé au maximum si ce nombre est plus petit que mille ?