GYMNASE DE CHAMBLANDES
PULLY

Examens de maturité juin 2012
Option spécifique PM

APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES

(Durée 2 h 40)

Remettre séparément l'épreuve de physique et celle d'applications des mathématiques.

Matériel autorisé : formulaires non annotés et calculatrices agréés
Les calculatrices permettant l'affichage graphique, le calcul symbolique, l'utilisation de modules pré-programmés ne sont pas autorisées.

La note de cette épreuve compte pour deux tiers dans la note de l'épreuve écrite de l'option spécifique physique et applications des mathématiques.

Problème 1. (10 points)

Peut-on réaliser une banderole mesurant exactement 5,79 m de long en posant côte-à-côte, sans les superposer, des feuilles de papier de dimensions 21 cm $\times$ 30 cm ?

Si oui, combien faut-il placer de feuilles en orientation « portait » (le petit côté dans le sens de la banderole) et combien faut-il en placer en orientation « paysage » (le long côté dans le sens de la banderole) ?

Y a-t-il plusieurs solutions ? Quelle est celle qui utilise le moins de feuilles ?

Problème 2. (12 points)

Un mot de 3 lettres a été numérisé en utilisant la règle $\mathrm{A} = 01, \mathrm{B} = 02, \ldots, \mathrm{Z} = 26$. Puis, le nombre de 6 chiffres ainsi obtenu a été séparé en 2 blocs de 3 chiffres pour être crypté à l'aide du système RSA et de la clé publique de Bob ($n = 247; e = 31$).

Déchiffrer le message secret intercepté 42|103. (Le message n'est pas signé.)

Problème 3. (12 points)

Un magicien, dont les aptitudes en calcul mental en surprendront plus d'un, demande à un spectateur de penser à un nombre entier compris entre 1 et 500.

Ensuite, il demande au spectateur de le diviser par 5 et de lui donner le reste de cette division.

Le spectateur répond 1.

Puis, il lui demande de même le reste obtenu en divisant le nombre par 7.

Le spectateur répond 5.

Finalement le magicien demande le reste obtenu en divisant le nombre par 19.

Et le spectateur répond 11.

Après cela, le magicien réfléchit quelques instants et annonce qu'il a deviné le nombre.

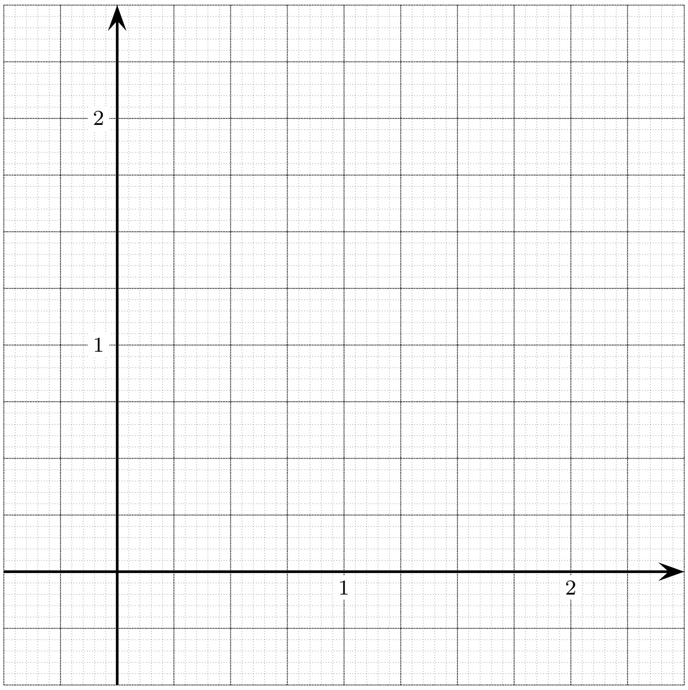
Trouver le nombre deviné par le magicien, à l'aide d'une calculatrice.

Problème 4. (17 points)

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3\,u_n + 1}{4}\ , n \geqslant 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} w_1 = 2 \\ w_{n+1} = \dfrac{3\,w_n + 1}{4}\ , n \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Sur le graphique ci-dessous, représenter les droites $y = \dfrac{3\,x+1}{4}$ et $y = x$.
   Utiliser ces droites pour construire, sur l'axe horizontal, les points A_1, A_2, A_3, A_4 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3, u_4, ainsi que les points B_1, B_2, B_3, B_4 d'abscisses respectives w_1, w_2, w_3, w_4.



2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = u_n + w_n$.
   (a) Calculer s_1, s_2, s_3, s_4.
   (b) Que peut-on conjecturer pour la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Le démontrer par récurrence.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = w_n - u_n$.
   (a) Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   (b) Déterminer d_n en fonction de n.

4. (a) Exprimer u_n en fonction de s_n et d_n : vérifier que $u_n = \frac{1}{2}\,(s_n - d_n)$.
   En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (b) De même, exprimer w_n en fonction de n.

5. (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
   (b) Préciser leur limite.

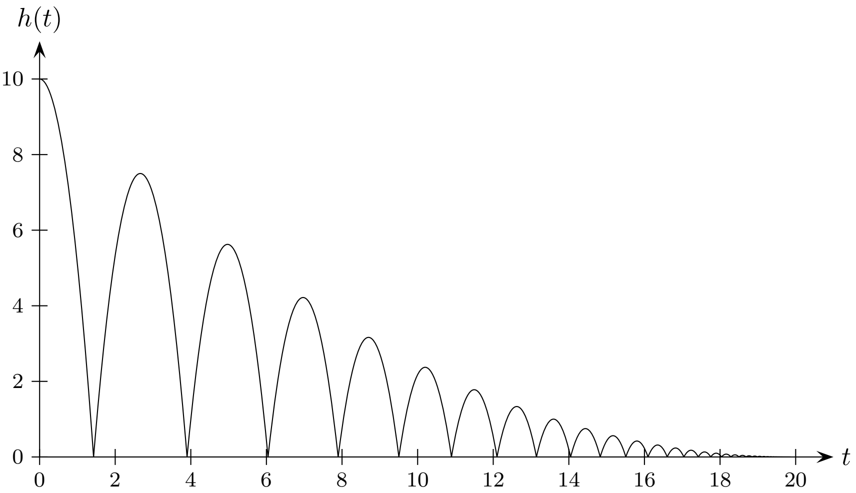
Problème 5. (11 points)
Les deux questions de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

1. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(2\,k+1)\,(2\,k+3)}$?

   Indication : déterminer les nombres A et B tels que $\dfrac{\mathrm{A}}{2\,k+1}+\dfrac{\mathrm{B}}{2\,k+3}=\dfrac{4}{(2\,k+1)\,(2\,k+3)}$.

2. La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\,\frac{2\,k+3}{k^2+1}$ est-elle
   (a) convergente ?
   (b) absolument convergente ?

Problème 6. (10 points)
On laisse tomber une balle d'une hauteur de 10 m. À chaque rebond, elle atteint une hauteur correspondant à 75 % de la hauteur d'où elle tombe.



On rappelle l'équation du mouvement uniformément accéléré : $\vec{r}=\frac{1}{2}\,\vec{a}\,t^2+\vec{v_0}\,t+\vec{r_0}$.
On prendra l'approximation $g \approx 9{,}81$ m/s^2 et on donnera les réponses sous forme numérique, arrondies au millième.

1. (a) Justifier que le temps t nécessaire à la balle pour parcourir la hauteur h est donné par $t=\sqrt{\frac{2\,h}{g}}$.
   (b) Vérifier que le premier, le deuxième et le troisième rebonds se produisent respectivement 1,428 s, 3,901 s et 6,043 s après le lâcher de la balle.
2. Combien de temps, après le lâcher de la balle, le 15$^{\mathrm{e}}$ rebond aura-t-il lieu ?
3. La balle finira-t-elle par s'arrêter ? Dans l'affirmative, pendant combien de temps aura-t-elle été en mouvement ?