Applications des mathématiques

(Durée 2h40)

Remettre séparément l'épreuve de physique et celle d'applications des mathématiques

La note de cette épreuve compte pour deux tiers de la note de l'épreuve écrite de l'option spécifique physique et applications des mathématiques.

Matériel autorisé : formulaires officiels non annotés et calculatrices agréées.
Les calculatrices permettant de tracer des graphes, de stocker du texte, d'effectuer du calcul littéral, la résolution d'équations ou de systèmes, le calcul intégral ou différentiel, le calcul matriciel ou la programmation ne sont pas autorisées.

Rédigez complètement les solutions des problèmes proposés ci-dessous.
(Les annotations sur les feuilles d'énoncés sont autorisées, mais ne seront pas prises en considération.)

Problème 1 (5 points)

Pour fêter dignement ses 80 ans, un grand-papa décide de donner 80 francs à chacun de ses petits enfants. Comme il est un peu excentrique, il décide de former les 80 francs uniquement avec des pièces de 2 francs et de 5 francs. De plus chacun de ses petits enfants doit recevoir un nombre de pièces de 2 francs différents de tous ses cousins.

a) Donner toutes les manières qu'il a d'arriver à la somme de 80 francs.

b) Sachant qu'il emploie toutes les combinaisons possibles, combien a-t-il de petits enfants ?

Problème 2 (9 points)

Pour les promotions 2015, on envisage de faire monter les bacheliers en cortège sur la scène. Le directeur a un problème. S'il fait marcher les bacheliers par rangs de cinq, il y aura un bachelier tout seul au dernier rang. S'il les fait marcher par rangs de sept, il manquera quatre bacheliers sur ce dernier rang et par rangs de onze, il manquera cinq bacheliers.
Sachant qu'il y a entre 50 et 500 bacheliers, combien serez-vous à marcher dans le cortège ?

Problème 3 (11 points)

Le secrétariat de Chamblandes emploie sa clé publique ($n = 10\ 573, e = 169$). La clé du secrétariat est trop petite, et on sait que 97 est un diviseur de n.

a) Vérifier que $d = 3\ 865$.

b) Votre enseignant de mathématiques a laissé un message codé au secrétariat : $c = 1050|8271$. Décrypter ce message.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Problème 4 (3 points)

Pour fêter la réussite de leur maturité la 3M2 a réalisé des « supers galets » possédant des caractéristiques de ricochet (jeu qui consiste à envoyer un galet rebondir plusieurs fois à la surface de l'eau) exceptionnelles : chaque rebond mesure exactement les cinq sixièmes du précédent et il y a une infinité de ricochets.

a) Si le premier rebond mesure 2 m, quelle distance le galet va-t-il parcourir ?

b) Quelle doit être la longueur du premier rebond pour parcourir 30 m ?

Problème 5 (8 points)

Étudier la convergence des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ avec $p \in]0; \infty[$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots$,

Problème 6 (7 points)

Calculer le polynôme de Taylor de

a) degré trois de la fonction $f(x) = \ln(\cos(x)) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pour $a = \frac{\pi}{4}$.

b) degré deux de la fonction $f(x) = e^{\ln(x^2)}$ pour $a = 1$.