

Applications des mathématiques

(Durée 2h40)

REMETTRE SÉPARÉMENT L'ÉPREUVE DE PHYSIQUE ET
CELLE D'APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES

La note de cette épreuve compte pour deux tiers de la note de l'épreuve écrite de l'option spécifique physique et applications des mathématiques.

Matériel autorisé : formulaires officiels non annotés et calculatrices agréées selon liste officielle.

Rédigez complètement les solutions des problèmes proposés ci-dessous.

Les annotations sur les feuilles d'énoncés sont autorisées, mais ne seront pas prises en considération.

Problème 1 (5 points)

Le comité des footballeurs de Chamblandes s'apprête à réaliser un terrain de football synthétique, de 105 m de long et 68 m de large.

Le premier jour, ils commencent par couvrir 1500 m². Chaque jour qui suit, ils couvrent les trois quarts de la surface posée la veille. Parviendront-ils à couvrir tout le terrain (justifier) ?

Problème 2 (22 points)

- a) (i) Étudier la convergence de $\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(3)} + \frac{1}{\ln(4)} - \frac{1}{\ln(5)} + \dots + \frac{(-1)^k}{\ln(k)} + \dots$
- (ii) Étudier la croissance de la fonction $f(x) = \ln(x) - x$.
En déduire que $\ln(x) < x - 1$, si $x > 1$.
- (iii) Étudier la convergence absolue de $\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(3)} + \frac{1}{\ln(4)} - \frac{1}{\ln(5)} + \dots + \frac{(-1)^k}{\ln(k)} + \dots$
- b) (i) Prouver que, si $p > \frac{1}{2}$, la fonction $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^p}$ est décroissante lorsque $x > \frac{1}{\sqrt{2p-1}}$.
- (ii) Étudier la convergence des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + 1)^p}$ avec $p \in]\frac{1}{2}; \infty[$ grâce au critère de l'intégrale.

Problème 3 (6 points)

- a) Déterminer le polynôme de Taylor de degré cinq de la fonction $f(x) = e^x$ pour $a = 0$.
- b) Utiliser le résultat précédent pour estimer e .
- c) Sachant que $e < 3$, quelle est l'imprécision de cette estimation ?

Problème 4 (14 points)

Déterminer tous les points à coordonnées entières situés sur la droite $637x - 119y = 35$ et à l'intérieur du disque de rayon 150 centré à l'origine.

Problème 5 (13 points)

Une récolte de riz est répartie équitablement entre trois marchands, qui s'en vont la vendre dans différents marchés, où l'on use de sacs contenant respectivement 83 onces, 110 onces et 135 onces.

Chaque marchand réussit à vendre l'entier des sacs qu'il lui est possible de vendre, si bien qu'il reste 32 onces au premier marchand, 70 onces au deuxième et 30 onces au dernier.

Combien d'onces, au minimum, la récolte contient-elle ?

Problème 6 (10 points)

Alice a pour clé publique $(407, 7)$, alors que Bob a pour clé publique $(1763, 13)$.

- a) Quel message crypté faut-il envoyer à Alice pour lui transmettre le message 18 ?
- b) Sachant que Bob a choisi deux nombres premiers p et q très proches l'un de l'autre, quelle signature (qu'on ne demande pas de crypter) fera croire à Alice que Bob en est l'auteur ?