Le comité des footballeurs de Chamblandes est parvenu à trouver un terrain pour créer un terrain de football synthétique, de 105 m de long et 68 m de large.

Le premier jour, ils commencent par couvrir 1500 m^2. Chaque jour qui suit, ils couvrent les trois quarts de la surface posée la veille. Parviendront-ils à finir le terrain (justifier) ?

La surface du terrain vaut $105 \cdot 68 = 7140$

$1500\left(1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} 1500\left(\frac{3}{4}\right)^n = 1500\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 6000 < 7140.$

1. Étudier la convergence de $\dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{1}{\ln(3)} + \dfrac{1}{\ln(4)} - \dfrac{1}{\ln(5)} + \cdots + \dfrac{(-1)^k}{\ln(k)} + \cdots$
2. Étudier la croissance de la fonction $f(x) = \ln(x) - x$ puis montrer que $\ln(x) < x - 1$ si $x > 1$.
3. Étudier la convergence absolue de $\dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{1}{\ln(3)} + \dfrac{1}{\ln(4)} - \dfrac{1}{\ln(5)} + \cdots + \dfrac{(-1)^k}{\ln(k)} + \cdots$
4. Prouver que la fonction $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^p}$ est décroissante si $p > \frac{1}{2}$ pour $x > \dfrac{1}{2\,p-1}$.
5. Étudier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^p}$ avec $p \in]\frac{1}{2}; \infty[$ grâce au critère de l'intégrale.

---

1. $f(x) = \ln(x)$ est croissante donc la série $u_n = \frac{1}{\ln(n)}$ est décroissante.

   On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ et la série est alternée donc elle converge.
2. $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$ qui est négative à partir de $x = 1$. De plus $f(1) = \ln 1 - 1 = -1$ ainsi $\ln x - x < -1$ ce qui donne $\ln x < x - 1$ qui nous donne finalement $\ln x + 1 < x$.
3. Elle ne converge pas absolument car $\dfrac{1}{\ln(x+1)} > \dfrac{1}{x}$. Donc la somme terme à terme des valeurs absolues des termes de la série est supérieure terme à terme à la série harmonique qui diverge.
4. $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)^p - x\,p\,(x^2+1)^{p-1}\,2\,x}{(x^2+1)^{2\,p}} = \dfrac{(x^2+1)^{p-1}\,[x^2+1-2\,p\,x^2]}{(x^2+1)^{2\,p}}$

   $f'(x) = \dfrac{1 - x^2\,(2\,p-1)}{(x^2+1)^{p+1}} = \dfrac{(1 - x\sqrt{2\,p-1})(1 + x\sqrt{2\,p-1})}{(x^2+1)^{p+1}}$ qui est négative avec nos conditions.
5. $\mathrm{I}(p) = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{n\,dn}{(n^2+1)^p} = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{2\,n\,dn}{(n^2+1)^p}$ avec $p \in]\frac{1}{2}; \infty[$.

   Si $p \neq 1$ on a $\mathrm{I}(p) = \left.\dfrac{(n^2+1)^{2(1-p)}}{1-p}\right|_1^{\infty}$ qui diverge si $p \in]\frac{1}{2}; 1[$ et converge si $p > 1$.

   $\mathrm{I}(1) = \left.\dfrac{\ln(n^2+1)}{2}\right|_1^{\infty} = \infty$ donc diverge.
   Au final la série converge uniquement si $p > 1$.

1. Déterminer le polynôme de Taylor de degré cinq de la fonction $f(x) = e^x$ pour $a = 0$.
2. Utiliser le résultat précédent pour estimer e.
3. Sachant que $e < 3$, quelle est l'imprécision de cette estimation ?

---

1. $P_5(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!}$.
2. $e \approx P_5(1) = 1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5!} = \dfrac{240+60+20+5+1}{120} = \dfrac{326}{120} = \dfrac{163}{60} = 2,7\overline{16}$.
3. $R_5(1) \leq \frac{e^c}{6!}$ où $c \in [0,1]$ et comme $e \leq 3$ nous avons donc $R_5(1) \leq \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} \approx 0,0041$.

Déterminer tous les points à coordonnées entières situés sur la droite $637\,x - 119\,y = 35$ et à l'intérieur du disque de rayon 150 centré à l'origine.

$$\begin{array}{rcl} 637 = 119 \cdot 5 + 42 & \Longrightarrow & 42 = 637 - 119 \cdot 5 \\ 119 = 42 \cdot 2 + 35 & \Longrightarrow & 35 = 119 - 42 \cdot 2 \\ 42 = 35 \cdot 1 + 7 & \Longrightarrow & 7 = 42 - 35 \cdot 1 \\ 35 = 7 \cdot 5 & & \end{array}$$

$\mathrm{pgcd}(637\,;119) = 7$ divise 35 : l'équation diophantienne admet une infinité de solutions.

$$\begin{aligned} 7 &= 42 - 35 \cdot 1 \\ &= 42 - (119 - 42 \cdot 2) \cdot 1 = 119 \cdot (-1) + 42 \cdot 3 \\ &= 119 \cdot (-1) + (637 - 119 \cdot 5) \cdot 3 = 637 \cdot 3 - 119 \cdot 16 \end{aligned}$$

Donc $637\,x - 119\,y = 35$ admet la solution particulière $(15\,;80)$.

La solution générale est $\begin{cases} x = 15 - \frac{-119}{7}\,k = 15 + 17\,k \\ y = 80 + \frac{637}{7}\,k = 80 + 91\,k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Cherchons pour quelles valeurs de k ces points sont à l'intérieur du disque $x^2 + y^2 \leqslant 150^2$:

$(15 + 17\,k)^2 + (80 + 91\,k)^2 \leqslant 150^2$

$8570\,k^2 + 15\ 070\,k - 15\ 875 \leqslant 0$

$\Delta = 15\ 070^2 - 4 \cdot 8570 \cdot (-15\ 875) = 771\ 299\ 900$

$k_1 = \frac{-15\ 070 - \sqrt{771\ 299\ 900}}{2 \cdot 8570} \approx -2{,}5 \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{-15\ 070 + \sqrt{771\ 299\ 900}}{2 \cdot 8570} \approx 0{,}741$

En conclusion, trois points satisfont les conditions posées :

$k = -2$ donne $(-19\,;-102)$;
$k = -1$ donne $(-2\,;-11)$;
$k = 0$ donne $(15\,;80)$.

Trois paysans partagent équitablement leur production de riz, qu'ils vont vendre dans différents marchés, où l'on use de sacs contenant respectivement 83 onces, 110 onces et 135 onces.

Lorsqu'ils se retrouvent, ils se félicitent d'avoir réussi à vendre tous les sacs qu'ils pouvaient, si bien qu'il reste 32 onces au premier paysan, 70 onces au deuxième et 30 onces au dernier.

Combien d'onces, au minimum, les paysans ont-ils produit ?

Si x désigne le nombre d'onces que chaque paysan emporte au marché, il s'agit de résoudre le système de congruences :

$$\begin{cases} x \equiv 32 \mod 83 \\ x \equiv 70 \mod 110 \\ x \equiv 30 \mod 135 \end{cases}$$

Comme $110 = 5 \cdot 22$ et $135 = 5 \cdot 27$, on observe d'abord que :

$$\begin{cases} x \equiv 32 \mod 83 \\ x \equiv 70 \mod 110 \\ x \equiv 30 \mod 135 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 32 \mod 83 \\ x \equiv 70 \mod 22 \\ x \equiv 70 \mod 5 \\ x \equiv 30 \mod 5 \\ x \equiv 30 \mod 27 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 32 \mod 83 \\ x \equiv 4 \mod 22 \\ x \equiv 0 \mod 5 \\ x \equiv 3 \mod 27 \end{cases}$$

avant de pouvoir appliquer le théorème chinois des restes.

$\mathrm{M} = 83 \cdot 22 \cdot 5 \cdot 27 = 246\ 510$

$\mathrm{M}_1 = \frac{246\ 510}{83} = 2970$, $\mathrm{M}_2 = \frac{246\ 510}{22} = 11\ 205$, $\mathrm{M}_3 = 42\ 302$, $\mathrm{M}_4 = 9130$.

1. $2970\,x \equiv 1 \mod 83 \iff -18\,x \equiv 1 \mod 83$

   $$\begin{array}{rcl} 83 = 18 \cdot 4 + 11 & \Longrightarrow & 11 = 83 - 18 \cdot 4 \\ 18 = 11 \cdot 1 + 7 & \Longrightarrow & 7 = 18 - 11 \cdot 1 \\ 11 = 7 \cdot 1 + 4 & \Longrightarrow & 4 = 11 - 7 \cdot 1 \\ 7 = 4 \cdot 1 + 3 & \Longrightarrow & 3 = 7 - 4 \cdot 1 \\ 4 = 3 \cdot 1 + 1 & \Longrightarrow & 1 = 4 - 3 \cdot 1 \\ 3 = 1 \cdot 3 & & \end{array}$$

   $1 = 4-3\cdot1 = 4-(7-4\cdot1)\cdot1 = 7\cdot(-1)+4\cdot2 = 7\cdot(-1)+(11-7\cdot1)\cdot2 = 11\cdot2+7\cdot(-3) = 11\cdot2+(18-11\cdot1)\cdot(-3) = 18\cdot(-3)+11\cdot5 = 18\cdot(-3)+(83-18\cdot4)\cdot5 = 83\cdot5-18\cdot23$

   On a trouvé, grâce à l'algorithme d'Euclide, $x \equiv 23 \mod 83$
2. $11\ 205\,x \equiv 1 \mod 22 \iff 7\,x \equiv 1 \mod 22 \quad |\cdot(-3) \iff x \equiv -3 \mod 22$
3. $42\ 302\,x \equiv 1 \mod 5 \iff 2\,x \equiv 1 \mod 5 \quad |\cdot 3 \iff x \equiv 3 \mod 5$
4. $9\ 130\,x \equiv 1 \mod 27 \iff 4\,x \equiv 1 \mod 27 \quad |\cdot 7 \iff x \equiv 7 \mod 27$

La solution du système de congruences est donc :

$32 \cdot 2970 \cdot 23 + 4 \cdot 11\ 205 \cdot (-3) + 0 \cdot 42\ 302 \cdot 3 + 3 \cdot 9130 \cdot 7 \equiv 24\ 600 \mod 246\ 510$

Les paysans ont produit, au minimum, 73 800 onces de riz.

Alice a pour clé publique $(407, 7)$, alors que Bob a pour clé publique $(1763, 13)$.

1. Quel message crypté faut-il envoyer à Alice pour lui transmettre le message 18 ?
2. Sachant que Bob a choisi deux nombres premiers p et q très proches l'un de l'autre, quelle signature (qu'on ne demande pas de crypter) fera croire à Alice que Bob en est l'auteur ?

---

1. Il s'agit de calculer $18^7 \mod 407$:

x	reste r	n	$18^{2^n} \mod 407$	contribution
7	1	0	18	18
3	1	1	$18^2 \equiv -83$	-83
1	1	2	$(-83)^2 \equiv -30$	-30

$18^7 \equiv 18 \cdot (-83) \cdot (-30) \equiv 50 \mod 407$

Le message crypté est donc 50.

2. $\sqrt{1763} \approx 41,99$ mène rapidement à $1763 = 41 \cdot 43$.

Donc $\varphi(1763) = 40 \cdot 42 = 1680$.

Pour trouver la clé privée de Bob, cherchons une solution particulière à l'équation diophantienne $13\,x + 1680\,y = 1$:

$$\begin{array}{rcl} 1680 = 13 \cdot 129 + 3 & \Longrightarrow & 3 = 1680 - 13 \cdot 129 \\ 13 = 3 \cdot 4 + 1 & \Longrightarrow & 1 = 13 - 3 \cdot 4 \\ 3 = 1 \cdot 3 & & \end{array}$$

$1 = 13 - 3 \cdot 4 = 13 - (1680 - 13 \cdot 129) \cdot 4 = 13 \cdot 517 + 1680 \cdot (-4)$

Bob a pour clé privée $d_{\mathrm{B}} = 517$.

La signature du message est donc $18^{517} \mod 1763$:

x	reste r	n	$18^{2^n} \mod 1763$	contribution
517	1	0	18	18
258	0	1	$18^2 \equiv 324$	
129	1	2	$324^2 \equiv 959$	959
64	0	3	$959^2 \equiv 1158$	
32	0	4	$1158^2 \equiv 1084$	
16	0	5	$1084^2 \equiv 898$	
8	0	6	$898^2 \equiv 713$	
4	0	7	$713^2 \equiv 625$	
2	0	8	$625^2 \equiv 1002$	
1	1	9	$1002^2 \equiv 857$	857

$18^7 \equiv 18 \cdot 959 \cdot 857 \equiv 201 \mod 1763$

La signature, non cryptée du message, est ainsi 201.