**Chamblandes 2016 — Problème 1**

a) **Ensemble de définition & Signe**

L'équation $3\,x^2+1=0$ n'admet aucune solution : $\Delta = 0^2 - 4\cdot 3 \cdot 1 = -12 < 0$.
Puisque le dénominateur ne s'annule jamais, la fonction est toujours définie : $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{3\,x^3-3}{3\,x^2+1} = \frac{3\,(x^3-1)}{3\,x^2+1} = \frac{3\,(x-1)\,(x^2+x+1)}{3\,x^2+1}$$

| | | $1$ | |
|---|---|---|---|
| $3$ | $+$ | | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x^2+x+1$ | $+$ | | $+$ |
| $3\,x^2+1$ | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3 < 0$

b) **Asymptotes**

Puisque $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$, il n'y a aucune asymptote verticale.

$$\begin{array}{rl|l} 3\,x^3 & \quad - 3 & 3\,x^2+1 \\ \cline{3-3} -\,3\,x^3 - x & & x \\ \cline{1-2} -\,x - 3 & & \end{array}$$

$y = x$ est l'asymptote oblique de $f$.

Étudions la position du graphe de $f$ par rapport à cette asymptote oblique, en déterminant le signe de la fonction $\delta(x) = \dfrac{-x-3}{3\,x^2+1}$ :

| | | $-3$ | |
|---|---|---|---|
| $-\,x-3$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $3\,x^2+1$ | $+$ | | $+$ |
| $\delta(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

En particulier, le graphe de $f$ coupe l'asymptote oblique au point $(-3\,;-3)$.

c) **Croissance**

$$f'(x) = \left(\frac{3\,x^3-3}{3\,x^2+1}\right)' = \frac{(3\,x^3-3)'\,(3\,x^2+1) - (3\,x^3-3)\,(3\,x^2+1)'}{(3\,x^2+1)^2}$$

$$= \frac{9\,x^2\,(3\,x^2+1) - (3\,x^3-3)\,6\,x}{(3\,x^2+1)^2} = \frac{27\,x^4+9\,x^2-18\,x^4+18\,x}{(3\,x^2+1)^2}$$

$$= \frac{9\,x^4+9\,x^2+18\,x}{(3\,x^2+1)^2} = \frac{9\,x\,(x^3+x+2)}{(3\,x^2+1)^2}$$

Il reste encore à factoriser $x^3 + x + 2$ dont les zéros entiers possibles sont $\pm 1$ et $\pm 2$.
$1^3 + 1 + 2 = 4 \neq 0$
$(-1)^3 + (-1) + 2 = 0$
Effectuons le schéma de Horner :

$$\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 1 & 2 \\
 & -1 & 1 & -2 \\
\hline
1 & -1 & 2 \| & 0
\end{array}$$

$x^3 + x + 2 = (x+1)\,(x^2 - x + 2)$

On a obtenu le résultat annoncé : $f'(x) = \dfrac{9\,x\,(x+1)\,(x^2-x+2)}{(3\,x^2+1)^2}$

| | | $-1$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $9$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x^2 - x + 2$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $(3\,x^2+1)^2$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$

$f(-1) = \frac{3\cdot(-1)^3-3}{3\cdot(-1)^2+1} = -\frac{3}{2}$
Le point $(-1\,;-\frac{3}{2})$ est un maximum.

$f(0) = \frac{3\cdot 0^3-3}{3\cdot 0^2+1} = -3$
Le point $(0\,;-3)$ est un minimum.

d) **Graphe**