Chamblandes 2016 — Problème 2

On cherche à minimiser le coût du tiroir :

$$15xy + 10(2 \cdot 40y + xy + 40x) = 25xy + 400x + 800y$$

On doit, par ailleurs, avoir un volume de $10\,000\text{ cm}^3$:

$$40xy = 10\,000$$

$$\text{On en tire } y = \frac{10\,000}{40x} = \frac{250}{x}$$

Le problème revient dès lors à déterminer le minimum de la fonction

$$f(x) = 25x \cdot \frac{250}{x} + 400x + 800 \cdot \frac{250}{x} = 6250 + 400x + \frac{200\,000}{x}$$

Étudions à cette fin sa croissance :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(6250 + 400x + \frac{200\,000}{x}\right)' = (6250 + 400x + 200\,000x^{-1})' = 400 - 200\,000x^{-2} \\ &= 400 - \frac{200\,000}{x^2} = \frac{400x^2 - 200\,000}{x^2} = \frac{400(x^2 - 500)}{x^2} = \frac{400(x - \sqrt{500})(x + \sqrt{500})}{x^2} \\ &= \frac{400(x - 10\sqrt{5})(x + 10\sqrt{5})}{x^2} \end{aligned}$$

		$-10\sqrt{5}$	0	$10\sqrt{5}$	
400		+	+	+	+
$x - 10\sqrt{5}$		-	-	-	+
$x - 10\sqrt{5}$		-	0	+	+
x^2		+	+	+	+
$f'(x)$		+	0	-	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\max$	$\searrow$	
				$\searrow$	$\min$
				$\nearrow$	

On en conclut que le coût de fabrication du tiroir sera minimal s'il possède pour dimensions :

$$x = 10\sqrt{5} \approx 22,36\text{ cm}$$

$$y = \frac{250}{10\sqrt{5}} = \frac{25}{\sqrt{5}} = \frac{25\sqrt{5}}{5} = 5\sqrt{5} \approx 11,18\text{ cm}$$