Chamblandes 2016 — Problème 4

A. Les points du graphe de f où la tangente est horizontale, c'est-à-dire de pente nulle, sont ceux où la dérivée s'annule. Il s'agit donc de résoudre :

$$0 = f'(x) = \Big(\ln(x) - 2\,x\Big)' = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2\,x}{x} \quad \text{d'où l'on tire} \quad x = \tfrac{1}{2}.$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = \ln(\tfrac{1}{2}) - 2 \cdot \tfrac{1}{2} = -\ln(2) - 1$$

Le point recherché a ainsi pour coordonnées $(\frac{1}{2}\,; -\ln(2) - 1)$.

Étudions le signe de la dérivée pour savoir si c'est un maximum ou un minimum :

		0		$\frac{1}{2}$	
$1-2\,x$	$+$	‖	$+$	0	$-$
x	$-$	‖	$-$	|	$+$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\nearrow$	max	$\searrow$

On conclut qu'il s'agit d'un maximum.

B. Le point où la fonction g coupe l'axe des x est donné par son zéro :
$e^x\,(x-2) = 0$ admet pour seule solution $x = 2$, car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Déterminons l'équation de la tangente t au graphe de g au point d'abscisse $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \Big(e^x\,(x-2)\Big)' = (e^x)'\,(x-2) + e^x\,(x-2)' = e^x\,(x-2) + e^x \cdot 1 \\ &= e^x\,\Big((x-2)+1\Big) = e^x\,(x-1) \end{aligned}$$

On sait déjà que $g(x_0) = 0$ et on calcule $g'(x_0) = g'(2) = e^2\,(2-1) = e^2$.

C'est pourquoi l'équation de la tangente au graphe de g au point d'abscisse $x_0 = 2$ s'écrit :

$$y = g'(x_0)\,(x - x_0) + g(x_0)$$
$$y = e^2\,(x-2) + 0$$
$$y = e^2\,x - 2\,e^2$$

L'axe des x a pour pente $m_1 = 0$ et la tangente t a pour pente $m_2 = g'(2) = e^2$.
L'angle φ qu'ils forment est donné par la formule :

$$\tan(\varphi) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1\,m_2}\right| = \left|\frac{e^2 - 0}{1 + 0 \cdot e^2}\right| = e^2$$

Donc $\varphi = \arctan(e^2) \approx 82{,}29^\circ$.