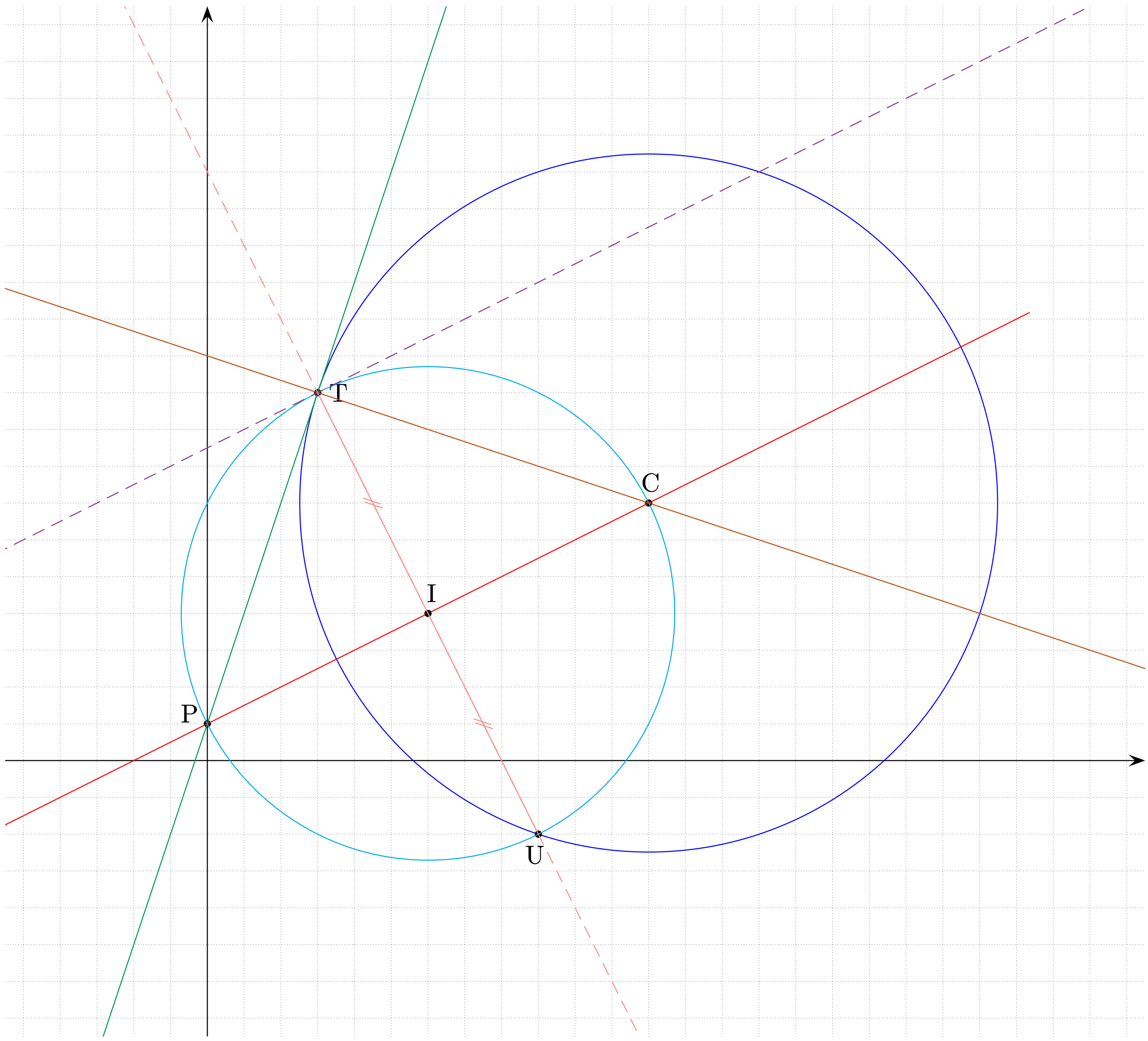
Chamblandes 2016 — Problème 5



a) $x^2 - 24\,x + y^2 - 14\,y + 103 = 0$

$\underbrace{x^2 - 12\,x + 144}_{(x-12)^2} - 144 + \underbrace{y^2 - 14\,y + 49}_{(y-7)^2} - 49 + 103 = 0$

$(x-12)^2 + (y-7)^2 = 144 + 49 - 103 = 90 = (3\sqrt{10})^2$

On conclut que le cercle Γ a pour centre $\boxed{\mathrm{C}(12\,;7)}$ et pour rayon $\boxed{r = 3\sqrt{10}}$.

b) Vérifions que les coordonnées du point T satisfont l'équation du cercle Γ :

$(3-12)^2 + (10-7)^2 = (-9)^2 + 3^2 = 81 + 9 = 90$

Puisque le point T appartient au cercle Γ, on peut utiliser l'équation dédoublée pour déterminer l'équation de la tangente t :

$(3-12)\,(x-12) + (10-7)\,(y-7) = 90$

$-9\,(x-12) + 3\,(y-7) = 90$

$-9\,x + 108 + 3\,y - 21 = 90$

$-9\,x + 3\,y - 3 = 0$

$\boxed{t : 3\,x - y + 1 = 0}$

c) La droite d admet pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Toute perpendiculaire à la droite d possède $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal et s'écrit donc $2\,x + y + c = 0$. En particulier, la perpendiculaire p passant par T vérifie $2 \cdot 3 + 10 + c = 0$, d'où suit $c = -16$. On a donc trouvé $p : 2\,x + y - 16 = 0$.

Déterminons l'intersection I des droites d et p :

$$\begin{cases} x - 2\,y = -2 \\ 2\,x + y = 16 \end{cases} \qquad \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1$$

$$\begin{cases} x - 2\,y = -2 \\ 5\,y = 20 \end{cases} \qquad \mathrm{L}_2 \to \tfrac{1}{5}\,\mathrm{L}_2$$

$$\begin{cases} x - 2\,y = -2 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + 2\,\mathrm{L}_2$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

On a trouvé $\mathrm{I}(6\,;4)$.

Comme le point I est le milieu des points T et U, on a :

$$\mathrm{I}(6\,;4) = \left(\tfrac{3+u_1}{2}\,;\tfrac{10+u_2}{2}\right) \iff \begin{cases} 6 \cdot 2 = 3 + u_1 \\ 4 \cdot 2 = 10 + u_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 9 = u_1 \\ -2 = u_2 \end{cases}$$

On a bien trouvé le résultat attendu $\boxed{\mathrm{U}(9\,;-2)}$.

d) Le cercle Γ' a pour centre le milieu des points T et U, à savoir le point $\mathrm{I}(6\,;4)$.

Son rayon vaut $\|\overrightarrow{\mathrm{TI}}\| = \left\|\begin{pmatrix} 6-3 \\ 4-10 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}\right\| = \left\|3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\| = |3|\,\sqrt{1^2 + (-2)^2} = 3\,\sqrt{5}$.

On conclut que le cercle Γ' a pour équation $\boxed{(x-6)^2 + (y-4)^2 = 45}$.

e) Pour déterminer les points d'intersection de la droite d et du cercle Γ', il faut résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x - 2\,y + 2 = 0 \\ (x-6)^2 + (y-4)^2 = 45 \end{cases}$$

La première équation donne $x = 2\,y - 2$ que l'on substitue dans la seconde :

$$\begin{cases} x = 2\,y - 2 \\ (2\,y - 2 - 6)^2 + (y - 4)^2 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\,y - 2 \\ 4\,y^2 - 32\,y + 64 + y^2 - 8\,y + 16 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\,y - 2 \\ 5\,y^2 - 40\,y + 35 = 5\,(y^2 - 8\,y + 7) = 5\,(y - 1)\,(y - 7) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \cdot 1 - 2 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 2 \cdot 7 - 2 = 12 \\ y = 7 \end{cases}$$

On a trouvé $\boxed{\mathrm{P}(0\,;1)}$ et $\boxed{\mathrm{C}(12\,;7)}$.

f) Commençons par déterminer une équation cartésienne de la droite CT.

Comme $\overrightarrow{\mathrm{CT}} = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 10 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, elle s'écrit $x + 3\,y + c = 0$.

De plus, elle passe par $\mathrm{C}(12\,;7)$, donc $12 + 3 \cdot 7 + c = 0$ impose $c = -33$.

On a obtenu $\mathrm{CT} : x + 3\,y - 33 = 0$.

Les bissectrices des droites CT et t sont données par la formule :

$$\frac{x + 3\,y - 33}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \pm \frac{3\,x - y + 1}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}$$

$$\frac{x + 3\,y - 33}{\sqrt{10}} = \pm \frac{3\,x - y + 1}{\sqrt{10}}$$

$$x + 3\,y - 33 = \pm(3\,x - y + 1)$$

Équation de la première bissectrice

$x + 3\,y - 33 = 3\,x - y + 1$

$-2\,x + 4\,y - 34 = 0$

$\boxed{b_1 : x - 2\,y + 17 = 0}$

Équation de la seconde bissectrice

$x + 3\,y - 33 = -3\,x + y - 1$

$4\,x + 2\,y - 32$

$\boxed{b_2 : 2\,x + y - 16 = 0}$

Vérifions encore que la première bissectrice b_1 est tangente au cercle Γ' :

$$\delta(\mathrm{I}\,;b_1) = \frac{|6 - 2 \cdot 4 + 17|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15\,\sqrt{5}}{5} = 3\,\sqrt{5} = r'$$