

Problème 1 (22 points)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{135(x^2 - 6)}{x^6}$$

- Donner le domaine de définition de la fonction f , son signe et les équations des éventuelles asymptotes.
- Étudier la croissance de la fonction f en précisant les coordonnées des extremums.
- Esquisser le graphe de la fonction f (échelle conseillée pour l'axe horizontal : 1 unité correspond à 2 carrés, et pour l'axe vertical : 1 unité correspond à 20 carrés).
- Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction f au point $(1; f(1))$.

Problème 2 (21 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

- Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{6x^2 + x + 1}{2x + 1}$.
- Déterminer l'aire de la région limitée par les courbes

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad y = g(x)$$

où

$$f(x) = -x^2 + 6x - 4 \quad \text{et} \quad g(x) = 4.$$

- Soit $f(x) = \cos(3x + \pi) - \frac{1}{2}$. Déterminer les zéros de la fonction f , puis sa dérivée.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\frac{x}{2}}}{\ln(x + 1)}$.

Problème 3 (18 points)

Soient $A(-22; -10)$, $B(9; 21)$ et $C(27; -3)$ les sommets d'un triangle.

- Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice m du côté AB.
- Vérifier que la droite n d'équation $3x - 4y - 18 = 0$ est la médiatrice de BC.
- Montrer que l'équation du cercle Γ circonscrit au triangle ABC est $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 625$.
- Montrer que le point $P(22; 12)$ est commun au cercle Γ et à la médiatrice n , puis déterminer les coordonnées de l'autre point d'intersection de Γ et n .
- On admet que l'équation du côté AB est $x - y = -12$ et que celle du côté AC est $x - 7y = 48$. Déterminer les équations des bissectrices b_1 et b_2 de l'angle en A.
Indication : $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
- Vérifier que P est sur l'une de ces bissectrices.

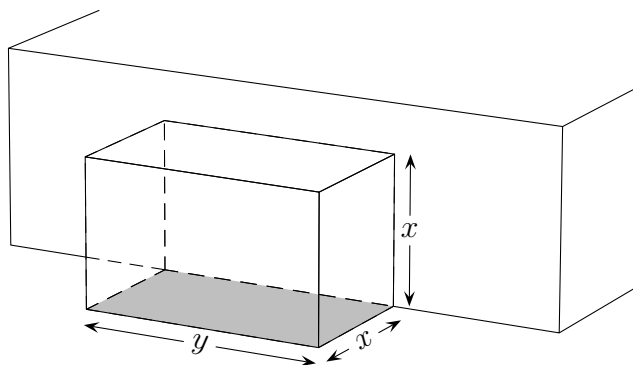
Problème 4 (11 points)

Un restaurant souhaite, pour un budget de 54 000 fr., réaliser une véranda afin d'augmenter sa capacité d'accueil.

Cette extension, en forme de parallélépipède rectangle, se compose de

- quatre parties en panneaux de verre : un toit, une façade et deux faces latérales carrées,
- un sol en bois.

Sachant que les panneaux de verre coûtent 360 fr./m² et que le bois coûte 240 fr./m², déterminer les dimensions de la véranda permettant d'obtenir un volume maximal.

**Problème 5** (13 points)

Dans les forêts de Suisse on compte une soixantaine d'essences d'arbres dont en moyenne 44 % d'épicéas, 18 % de hêtres et 15 % de sapins. Les autres essences sont toutes nettement moins répandues.

- a) Sylvain se balade en forêt, il passe devant trois arbres à la suite. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de trois épicéas ?
- b) Au cours de sa promenade, Sylvain grave chacune des sept lettres de son prénom sur le tronc de sept arbres choisis au hasard (une lettre par tronc). Vérifier que la probabilité que les lettres de son prénom soient toutes écrites sur des arbres appartenant uniquement aux essences les moins répandues des forêts suisses est inférieure à 0,01 %.
- c) Sylvain décide ensuite de ramasser un morceau d'écorce de cinq arbres au hasard. Quelle est la probabilité qu'il récolte au moins une écorce de hêtre ?
- d) Puis Sylvain coupe une branche sur cinq arbres au hasard. Quelle est la probabilité que son bouquet de cinq rameaux soit composé de deux branches d'épicéa, une branche de hêtre et deux de sapins ?
- e) Sylvain désire ramener chez lui un sapin pour Noël directement de la forêt, mais il est incapable de différencier les sapins des épicéas. Il ramène donc chez lui un arbre de Noël qui peut être l'un ou l'autre. Quelle est la probabilité que Sylvain rapporte un véritable sapin à la maison ?