Problème 1 (22 points)
Soit la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{135(x^2-6)}{x^6}$$

a) Donner le domaine de définition de la fonction f, son signe et les équations des éventuelles asymptotes.
b) Étudier la croissance de la fonction f en précisant les coordonnées des extremums.
c) Esquisser le graphe de la fonction f (échelle conseillée pour l'axe horizontal : 1 unité correspond à 2 carrés, et pour l'axe vertical : 1 unité correspond à 20 carrés).
d) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de la fonction f au point $(1; f(1))$.

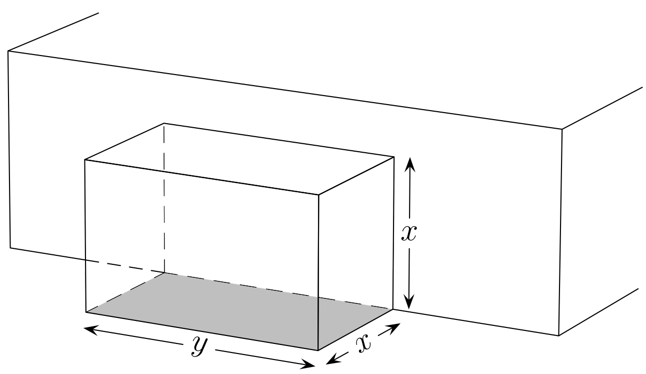
Problème 2 (21 points)
Les questions suivantes sont indépendantes.

a) Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{6\,x^2+x+1}{2\,x+1}$.
b) Déterminer l'aire de la région limitée par les courbes
$$y = f(x) \qquad \text{et} \qquad y = g(x)$$
où
$$f(x) = -x^2+6\,x-4 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 4\,.$$
c) Soit $f(x) = \cos(3x+\pi) - \frac{1}{2}$. Déterminer les zéros de la fonction f, puis sa dérivée.
d) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{\ln(x+1)}$.

Problème 3 (11 points)
Un restaurant souhaite, pour un budget de 54 000 fr., réaliser une véranda afin d'augmenter sa capacité d'accueil.
Cette extension, en forme de parallélépipède rectangle, se compose de

— quatre parties en panneaux de verre : un toit, une façade et deux faces latérales carrées,
— un sol en bois.

Sachant que les panneaux de verre coûtent 360 fr./m^2 et que le bois coûte 240 fr./m^2, déterminer les dimensions de la véranda permettant d'obtenir un volume maximal.



Problème 4 (16 points)
On donne la sphère Σ_1 d'équation

$$(\Sigma_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 31$$

ainsi que les points A$(-4; 1; 2)$, B$(0; 3; 6)$ et C$(1; 5; 4)$.

a) Déterminer le centre P et le rayon r de Σ_1.

b) Déterminer l'équation du plan α contenant les points A, B et C ; puis montrer que la sphère Σ_1 est tangente au plan α.

c) Déterminer l'équation d'une sphère Σ_2, de même rayon que Σ_1, qui passe par P et dont le centre appartient au plan α.

d) Soit d la droite perpendiculaire au plan α et passant par P. Déterminer les équations de deux sphères dont le centre appartient à la droite d et qui sont simultanément tangentes à Σ_1 et à Σ_2.

Problème 5 (13 points)
Dans les forêts de Suisse on compte une soixantaine d'essences d'arbres dont en moyenne 44 % d'épicéas, 18 % de hêtres et 15 % de sapins. Les autres essences sont toutes nettement moins répandues.

a) Sylvain se balade en forêt, il passe devant trois arbres à la suite. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de trois épicéas ?

b) Au cours de sa promenade, Sylvain grave chacune des sept lettres de son prénom sur le tronc de sept arbres choisis au hasard (une lettre par tronc). Vérifier que la probabilité que les lettres de son prénom soient toutes écrites sur des arbres appartenant uniquement aux essences les moins répandues des forêts suisses est inférieure à 0,01 %.

c) Sylvain décide ensuite de ramasser un morceau d'écorce de cinq arbres au hasard. Quelle est la probabilité qu'il récolte au moins une écorce de hêtre ?

d) Puis Sylvain coupe une branche sur cinq arbres au hasard. Quelle est la probabilité que son bouquet de cinq rameaux soit composé de deux branches d'épicéa, une branche de hêtre et deux de sapins ?

e) Sylvain désire ramener chez lui un sapin pour Noël directement de la forêt, mais il est incapable de différencier les sapins des épicéas. Il ramène donc chez lui un arbre de Noël qui peut être l'un ou l'autre. Quelle est la probabilité que Sylvain rapporte un véritable sapin à la maison ?

Problème 6 (12 points)
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une base du noyau de A.

b) Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice A. Déterminer une base de l'espace propre correspondant.

c) Déterminer si la matrice A est diagonalisable. Si c'est le cas, donner la matrice diagonale correspondante. Sinon, le justifier.