

22) Problème 1

$$f(x) = \left(27 \cdot \left(\frac{5}{x^4} - \frac{30}{x^6} \right) \right) = \frac{135(x^2 - 6)}{x^6}$$

a) zeros : $\{\pm\sqrt{6}\}$ $\text{ED } f = \mathbb{R}^*$

$135(x^2 - 6)$	$+$	0	$-$	0	$+$
x^6	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

(f est une fonction paire)

AV : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, AV : $x = 0$

AH : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, AH : $y = 0$ (les intersections de

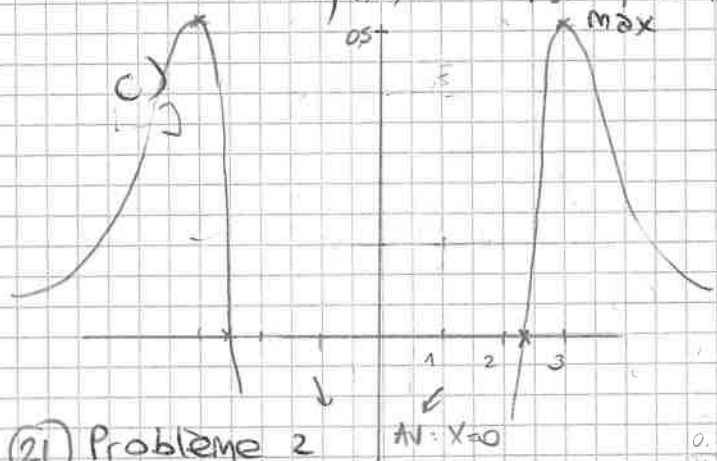
l'AH avec le graphe sont les zeros)

b) $f'(x) = \frac{135 \cdot 2x \cdot x^6 - 135(x^2 - 6) \cdot 6x^5}{x^{12}} = \frac{540(9 - x^2)}{x^7}$

$540(9 - x^2)$	$-$	0	$+$	0	$-$
x^7	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
		max		max	

(f' est une fonction impaire)

Max en $(-3; \frac{5}{9})$ et en $(3; \frac{5}{9})$



d) $P(1; -675)$

$f'(1) = 4320$

(+) : $y = 4320x - 4995$

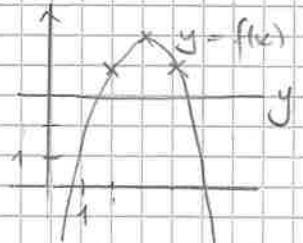
21) Problème 2

a) Div. euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 6x^2 + x + 1 & 2x + 1 \\ - (6x^2 + 3x) & 3x - 1 \\ \hline -2x + 1 & \\ - (-2x - 1) & \\ \hline 2 & \end{array}$$

donc $\int \frac{6x^2 + x + 1}{2x + 1} dx = \int \left(3x - 1 + \frac{2}{2x + 1} \right) dx =$

$$= \frac{3}{2}x^2 - x + \ln(|2x + 1|) + C.$$

b)  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-4)(x-2) = 0$

Vu le dessin, $A = \int_2^4 (-x^2 + 6x - 4 - 4) dx =$
 $= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x \right) \Big|_2^4 = -\frac{64}{3} + 48 - 32 + \frac{8}{3} - 12 + 16 = \frac{4}{3}$

c) On résout $\cos(3x + \pi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3x + \pi = \frac{\pi}{3} + k_1 \cdot 2\pi \\ 3x + \pi = -\frac{\pi}{3} + k_2 \cdot 2\pi, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = \\ = -3 \sin(3x + \pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + k_1 \cdot \frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{4\pi}{3} + k_2 \cdot \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x/2}}{\ln(x+1)} = \frac{0}{0} \stackrel{BH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} e^{-x/2}}{1/(x+1)} = \frac{1}{2}$

11

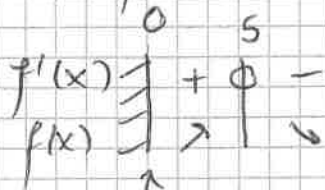
Problème 3

Volume : $x^2 y$ Contrainte : $360(2x^2 + 2xy) + 240xy = 54'000 + 1'240$

$$3x^2 + 3xy + xy = 225 \quad \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + 4xy = 225$$

$$\text{Donc } y = \frac{225 - 3x^2}{4x} = \frac{225}{4x} - \frac{3}{4}x$$

On veut maximiser $f(x) = \frac{225}{4} \cdot x - \frac{3}{4}x^3$ On a $f'(x) = \frac{225}{4} - \frac{9}{4}x^2$ qui s'annule en $x = \pm 5$ 

Le volume est donc

maximal pour $x = 5m$, $y = 7,5m$ Valeurs admissibles : $x, y \geq 0$

⑬ Problème 5

$$a) P(3 \text{ épicéas}) = 0,44^3 \approx 8,52\%$$

$$b) \text{ Il y a } 100 - 44 - 18 - 15 = 23\% \text{ de telles espèces.}$$

$$\text{Donc } p = (0,23)^7 \approx 0,0034\% < 0,01\%.$$

$$c) p = 1 - (1 - 0,18)^5 \approx 62,93\%$$

$$d) C_2^5 \cdot C_1^3 \cdot C_2^2 = 0,44^2 \cdot 0,18 \cdot 0,15^2 \approx 2,35\%$$

$$e) p(\text{sapin} | \text{sapin ou épicéa}) = \frac{0,15}{0,15 + 0,44} \approx 25,42\%$$

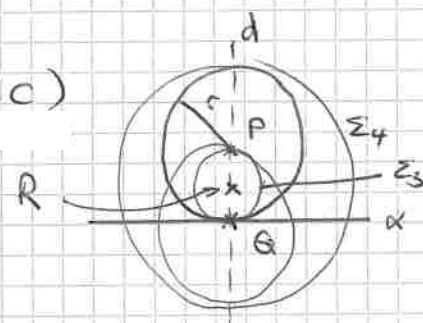
116 Problème 4

a) $(\Sigma_1): (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \underbrace{31+4+1}_{=36}$
donc $P(2; -1; 0)$, $r = 6$.

b) On a $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

donc $(\alpha): 2x - 2y - z = -12$

On a $S(P, \alpha) = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 12|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{18}{3} = 6 = r$.



d = perpendiculaire à α par P .

(d): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

$Q = d \cap \alpha$

$2(2+2k) - 2(-1-2k) - (-k) = -12 \Leftrightarrow 9k = -18$

donc $k = -2$ et $Q(-2; 3; 2)$

Donc $(\Sigma_2): (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 36$.

d) Appelons Σ_3 et Σ_4 ces deux sphères, (cf. figures)
centrées en $R = M_{PR}$, $R(0, 1; 1)$ et de rayon
 $r_3 = \frac{6}{2} = 3$ et $r_4 = 6+6=12$

Donc $(\Sigma_3): x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$

$(\Sigma_4): x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 144$.

Problème 6

Partie A

a) $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3+2L_1]{1/3 L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3-6L_2]{L_1-2L_2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ donc $\ker A = \langle (1; 0; 1) \rangle$.
Base $((1; 0; 1))$.

b) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, valeur propre 3.

$$\text{On a } E_3 = \ker(A - 3I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc c'est le plan } -2x + 2y - z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -2x + 2y. \text{ Donc } E_3 = \langle (1, 0, -2), (0, 1, 2) \rangle$$

c) Oui, elle est diagonalisable car

$\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 0, -2), (0, 1, 2))$ est une base de vecteurs propres.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$