



Gymnase de Chamblandes

Av. des Désertes 29
Case Postale 175
1009 Pully

Examens écrits
Session de juin 2021

École de maturité
Épreuve de
MATHÉMATIQUES NIVEAU STANDARD

Nom : _____

Prénom : _____

Classe : _____

Durée de l'épreuve : 240 minutes.

Matériel autorisé : Formulaire officiel non annoté et calculatrices agréées selon la liste officielle.

Consigne : Les problèmes doivent être présentés et rédigés soigneusement.
Les calculs doivent être détaillés.

Problème 1 (23 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^3 - 6x}{x^2 - 3}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f , son signe et les équations de ses asymptotes.
- Vérifier que la dérivée de f est donnée par l'expression $f'(x) = \frac{3(x^2 - 6)(x^2 - 1)}{(x^2 - 3)^2}$.
- Déterminer la croissance de f et les coordonnées des extrema de f .
- Sur une nouvelle page, esquisser le graphe de f à l'échelle 1 unité = 2 carrés = 1 cm.

Problème 2 (14 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

- Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(x).$$

Esquisser leur graphe sur l'intervalle $[0; 2\pi]$. Déterminer l'aire de la région limitée par les courbes $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ et $x = \pi$ (on demande la valeur exacte).

- Déterminer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la région limitée par les courbes

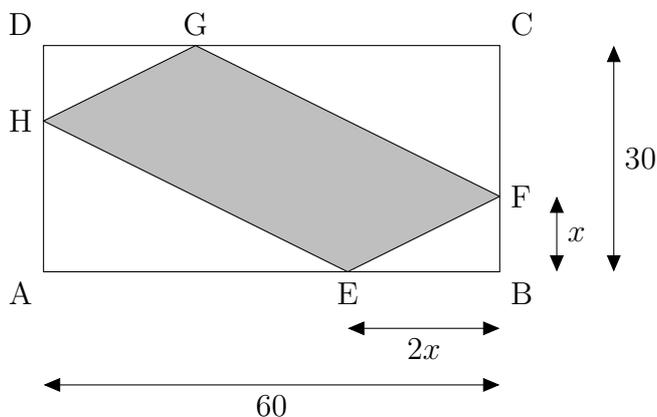
$$y = 5 - x^2 \quad \text{et} \quad y = 1$$

autour de l'axe des x (on demande la valeur exacte).

Problème 3 (8 points)

Le parallélogramme EFGH est inscrit dans un rectangle ABCD de dimensions 30 cm \times 60 cm de sorte que $BE = 2BF$. On pose $x = BF$ et $2x = BE$.

Quelle est l'aire maximale de ce parallélogramme? Que vaut alors x ? Justifier.



Problème 4 (21 points)

Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(-3; -2)$ et le cercle Γ d'équation

$$x^2 + y^2 - 2x - 16y + 7 = 0.$$

- a) Déterminer les coordonnées du centre C et le rayon r du cercle Γ .
- b) Montrer que A est extérieur au cercle Γ et déterminer la plus courte distance d'un point de Γ au point A .
- c) Déterminer une équation cartésienne de m , la médiatrice du segment $[AC]$.
- d) Soient B et D les points d'intersection de m et Γ . Vérifier que B a pour coordonnées $(4; 1)$ et déterminer celles de D .
- e) La droite (AD) a pour équation $7x + 3y + 27 = 0$. Montrer qu'elle est tangente au cercle Γ .
- f) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB) .
- g) La droite (AB) est tangente au cercle Γ . Déterminer l'équation de la droite t parallèle à (AB) et également tangente au cercle Γ . On nommera T le point de tangence et F l'intersection de t avec (AD) (on ne demande pas leurs coordonnées).
- h) Déterminer la nature du quadrilatère $ABTF$ et calculer son aire.

Problème 5 (17 points)

La plupart des articles commercialisés sont identifiés par un code à 13 chiffres traduit sous forme de code-barres pour la saisie informatique.

Le dernier chiffre est une clef de contrôle qui permet de détecter les éventuelles erreurs de saisie par des humains ou par des capteurs électroniques.

D'après les données statistiques, les erreurs de saisie se répartissent **exclusivement** selon les types ci-dessous :

- un seul chiffre faux : 60%,
- inversion de deux chiffres : 10%,
- ajout ou oubli d'un chiffre : 30%.

La clef de contrôle détecte toute erreur portant sur un seul chiffre. L'inversion de deux chiffres est détectée 8 fois sur 9, un mauvais nombre de chiffres 9 fois sur 10.

Pour la suite, nous nous intéressons uniquement aux cas où une erreur s'est produite.

- a) Représenter la situation par un arbre.
- b) Vérifier que la probabilité qu'une erreur soit détectée vaut $95,\overline{8}\%$.
- c) La clef de contrôle a détecté une erreur, quelle est la probabilité qu'un seul des chiffres saisis soit faux ?
- d) Sachant que le code saisi a le bon nombre de chiffres, quelle est la probabilité que la clef de contrôle détecte une erreur ?

On vérifie dix codes à l'aide de la clef de contrôle.

- e) Calculer la probabilité que la clef de contrôle détecte exactement huit codes présentant une erreur.
- f) Calculer la probabilité que la clef de contrôle ne détecte pas d'erreur sur au moins l'un des dix codes.