Gymnase de Chamblandes

Av. des Désertes 29
Case Postale 175
1009 Pully

Examens écrits
Session de juin 2021

École de maturité

Épreuve de

MATHÉMATIQUES NIVEAU RENFORCÉ

Nom : ____________________

Prénom : ____________________

Classe : ____________________

Durée de l'épreuve : 240 minutes.

Matériel autorisé : Formulaire officiel non annoté et calculatrices agréées selon la liste officielle.

Consigne : Les problèmes doivent être présentés et rédigés soigneusement.
Les calculs doivent être détaillés.

Problème 1 (23 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3\,x^3 - 6\,x}{x^2 - 3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f, son signe et les équations de ses asymptotes.

b) Vérifier que la dérivée de f est donnée par l'expression $f'(x) = \dfrac{3\,(x^2-6)\,(x^2-1)}{(x^2-3)^2}$.

c) Déterminer la croissance de f et les coordonnées des extrema de f.

d) Sur une nouvelle page, esquisser le graphe de f à l'échelle 1 unité = 2 carrés = 1 cm.

Problème 2 (14 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

a) Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(x).$$

Esquisser leur graphe sur l'intervalle $[0; 2\,\pi]$. Déterminer l'aire de la région limitée par les courbes $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ et $x = \pi$ (on demande la valeur exacte).

b) Déterminer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la région limitée par les courbes

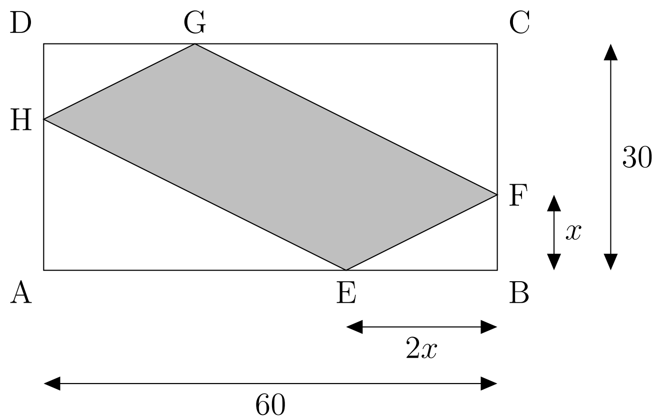
$$y = 5 - x^2 \quad \text{et} \quad y = 1$$

autour de l'axe des x (on demande la valeur exacte).

Problème 3 (8 points)

Le parallélogramme EFGH est inscrit dans un rectangle ABCD de dimensions $30\,\text{cm} \times 60\,\text{cm}$ de sorte que BE = 2BF. On pose x = BF et $2x$ = BE.

Quelle est l'aire maximale de ce parallélogramme ? Que vaut alors x ? Justifier.



Problème 4 (14 points)
Relativement à un repère orthonormé de l'espace, on considère :

- Les points $A(-3;1;3)$, $B(0;3;1)$ et $C(1;1;-1)$;
- La droite d d'équation paramétrique :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan passant par les points A, B et C.

b) Montrer que le point $A'(-1;-1;7)$ est le symétrique de A par rapport à d. Donner l'équation cartésienne de la sphère Σ_1 de centre A' et de rayon 4.

c) On considère les plans d'équation

$$x + 2y - 2z - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad 2x - y + 2z + 1 = 0$$

Déterminer l'équation de la sphère Σ_2 tangente simultanément aux plans ci-dessus et dont le centre appartient à la droite d.

d) Quelle est la position relative de Σ_1 par rapport à Σ_2 ?

Problème 5 (17 points)
La plupart des articles commercialisés sont identifiés par un code à 13 chiffres traduit sous forme de code-barres pour la saisie informatique.

Le dernier chiffre est une clef de contrôle qui permet de détecter les éventuelles erreurs de saisie par des humains ou par des capteurs électroniques.

D'après les données statistiques, les erreurs de saisie se répartissent **exclusivement** selon les types ci-dessous :

- un seul chiffre faux : 60%,
- inversion de deux chiffres : 10%,
- ajout ou oubli d'un chiffre : 30%.

La clef de contrôle détecte toute erreur portant sur un seul chiffre. L'inversion de deux chiffres est détectée 8 fois sur 9, un mauvais nombre de chiffres 9 fois sur 10.

Pour la suite, nous nous intéressons uniquement aux cas où une erreur s'est produite.

a) Représenter la situation par un arbre.

b) Vérifier que la probabilité qu'une erreur soit détectée vaut $95{,}\overline{8}\%$.

c) La clef de contrôle a détecté une erreur, quelle est la probabilité qu'un seul des chiffres saisis soit faux ?

d) Sachant que le code saisi a le bon nombre de chiffres, quelle est la probabilité que la clef de contrôle détecte une erreur ?

On vérifie dix codes à l'aide de la clef de contrôle.

e) Calculer la probabilité que la clef de contrôle détecte exactement huit codes présentant une erreur.

f) Calculer la probabilité que la clef de contrôle ne détecte pas d'erreur sur au moins l'un des dix codes.

Problème 6 (15 points)

On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par sa matrice A (relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$) ci-dessous :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de A et montrer que les valeurs propres sont 0 et -1.

b) Donner une base des espaces propres E_0 et E_{-1} (associés respectivement aux valeurs propres 0 et -1).

c) Déterminer une matrice P telle que la matrice $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit diagonale. Donner alors la matrice A'.

d) Donner les valeurs propres de la matrice A^2 et interpréter géométriquement l'application $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.