

Ex. 1

a) $f(x) = \frac{3x(x^2-2)}{x^2-3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$, $Z = \{0, \pm\sqrt{2}\}$

	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$3x$	-	-	-	+	+
x^2-2	+	+	0	-	-
x^2-3	+	0	-	-	+
$f(x)$	-	+	0	-	+

C'est une fonction impaire: $f(-x) = -f(x)$

AV: $\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{3}} f(x) = \frac{0}{0} = \infty$, il y a des AV d'équation $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$.

Vu les degrés, il y a une AO:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 6x & x^2 - 3 \\ - (3x^3 - 9x) & \\ \hline 3x & \end{array}$$

L'éq. de l'AO est $y = 3x$
 or $S(x) = \frac{3x}{x^2-3}$

Le graphe de f coupe l'AO en $P(0;0)$

b) $f'(x) = \frac{3(3x^2-2)(x^2-3) - (3x^3-6x) \cdot 2x}{(x^2-3)^2} =$
 $= \frac{3(3x^4 - 11x^2 + 6) - 3(2x^4 - 4x^2)}{(x^2-3)^2} = \frac{3(x^4 - 7x^2 + 6)}{(x^2-3)^2}$

c)

	$-\sqrt{6}$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$
$3(x^2-6)$	+	0	-	-	-	0
x^2-1	+	+	0	-	+	+
$(x^2-3)^2$	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	↗	↘	↘	↗	↘	↗
	max		min	max		min

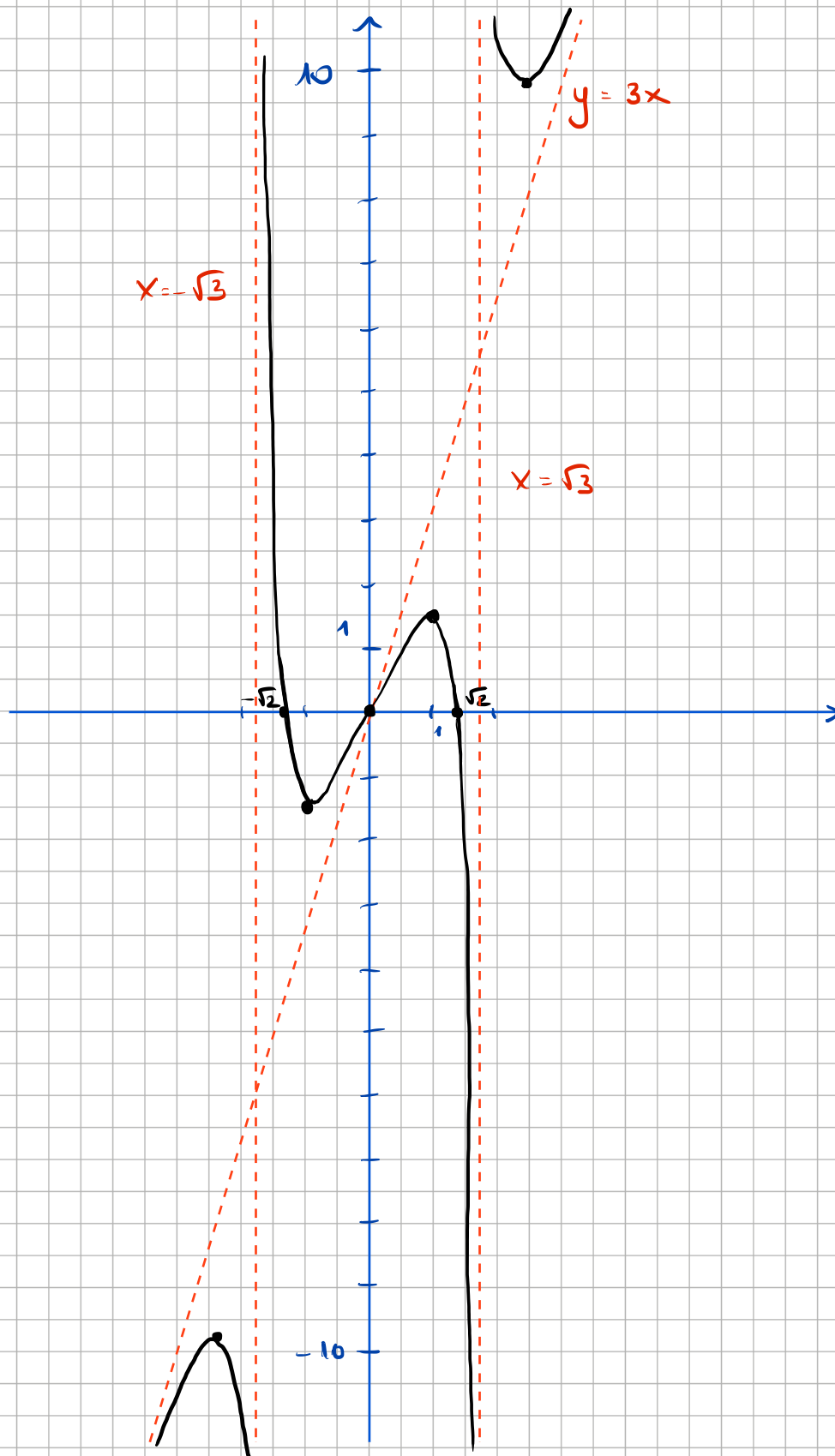
Max $(-\sqrt{6}; 4\sqrt{6})$
 $\approx 2,45 \quad \approx 9,8$

Min $(\sqrt{6}; -4\sqrt{6})$

Min $(-1; -1,5)$

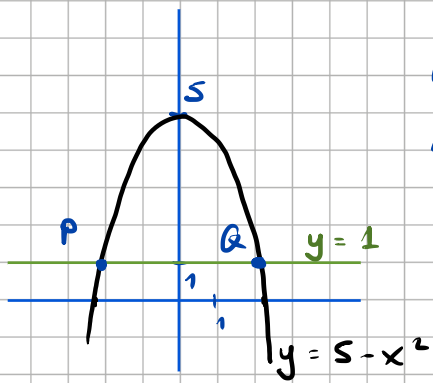
Max $(1; 1,5)$

d)



Ex. 2

b.)



La courbe $y = 5 - x^2$ est une parabole concave de sommet $S(0; 5)$.

Les points P et Q ont pour abscisses les x tels que $5 - x^2 = 1$ donc $x^2 = 4$ et $x = \pm 2$.

Ainsi $P(-2; 1)$ et $Q(2; 1)$.

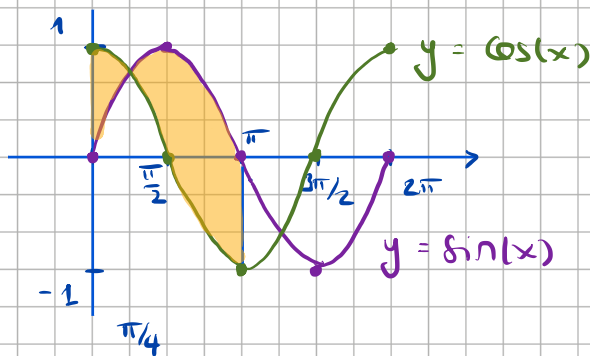
La courbe $y = 5 - x^2$ est au-dessus de $y = 1$ entre -2 et 2 .

$$\text{Donc } V = \pi \int_{-2}^2 ((5 - x^2)^2 - 1) dx \quad (\text{ou } 2\pi \int_0^2 ((5 - x^2)^2 - 1) dx)$$

$$= \pi \int_{-2}^2 (x^4 - 10x^2 + 24) dx = \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 24x \right) \Big|_{-2}^2$$

$$= \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{80}{3} + 48 \right) \cdot 2 = \pi \cdot \frac{416}{15} \cdot 2 = \frac{832\pi}{15} \approx 174,25$$

a.)



$$\sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow$$

$$\tan(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \sin(x)) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin(x) - \cos(x)) dx =$$

$$= (\sin(x) + \cos(x)) \Big|_0^{\pi/4} + (-\cos(x) - \sin(x)) \Big|_{\pi/4}^{\pi} =$$

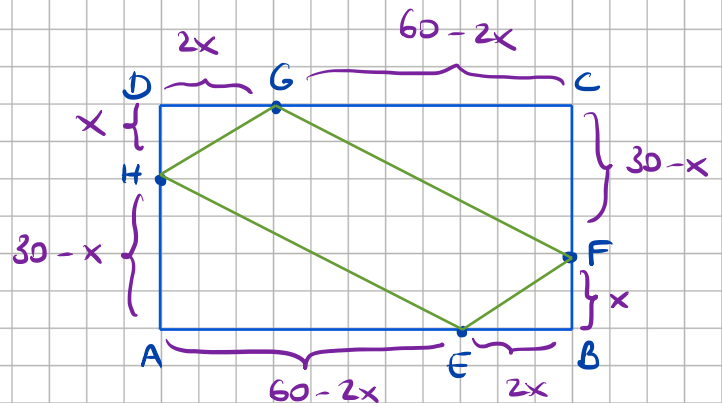
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 + 1 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$$

Ex 3

L'aire du parallélogramme EFGH s'obtient en enlevant à l'aire du rectangle ABCD les aires des quatre triangles rectangles.

Donc

$$f(x) = 60 \cdot 30 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x + \\ - 2 \cdot \frac{1}{2} (60 - 2x)(30 - x)$$



$$\Rightarrow f(x) = 1800 - 2x^2 - (1800 - 120x + 2x^2) \\ = -4x^2 + 120x$$

Les valeurs admissibles pour x sont $[0; 30]$.

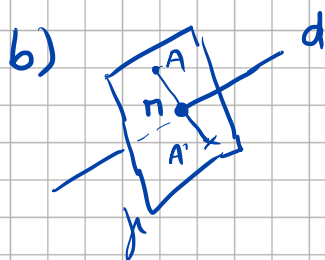
On a $f'(x) = -8x + 120$ qui s'annule en $x = 15$, qui est positive avant 15 et négative après.

L'aire est donc maximale pour $x = 15$ et vaut alors 900.

Problème 4 (GA)

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

donc $(\beta): 2x - y + 2z = -1$



b) Soit π le plan perpendiculaire à d passant par A . Alors

$(\pi): x - y - z = -7$

$\pi \cap d: (-\lambda) - (-2 + \lambda) - (3 + \lambda) = -7 \Leftrightarrow$

$3\lambda = 6$ donc $\lambda = 2$ et $M(-2; 0; 5)$

finallement $\vec{OA'} = \vec{OM} + \vec{MA'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

donc $A'(-1; -1; 7)$.

$\Rightarrow (\Sigma_1): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 = 16$

c) Déterminons le plan bissecteur de α et $\pi = \beta$.

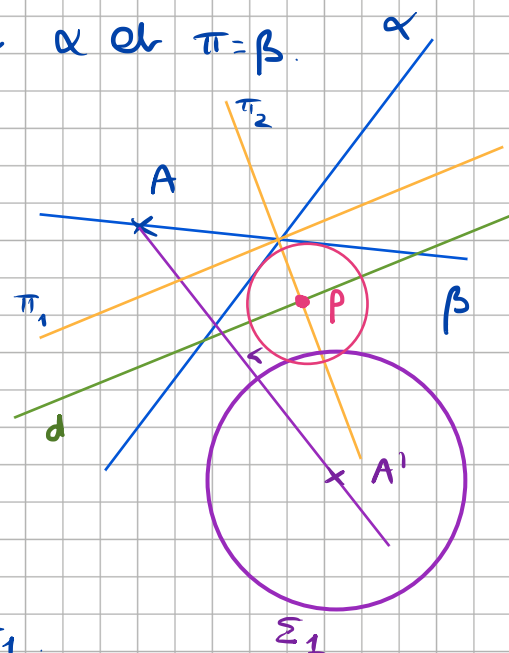
$$\frac{x + 2y - 2z - 1}{3} = \pm \frac{2x - y + 2z + 1}{3}$$

$\oplus (\pi_1): x - 3y + 4z = -2$

$\ominus (\pi_2): 3x + y = 0$

$\pi_2 \cap d: -\lambda - 3(-2 + \lambda) + 4(3 + \lambda) = -2$

$\Rightarrow 18 = -2 \quad \zeta$

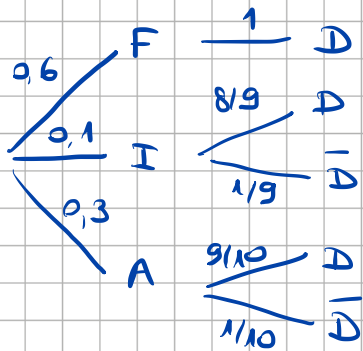


La droite d est parallèle au plan π_2 .

Il n'y a donc bien qu'une sphère.

Ex 5

- a) On note F = "un seul chiffre faux", I = "inversion de deux chiffres", A = "ajout ou soult d'un chiffre".
Puis D = "le def de contrôle détecte l'erreur".



$$b) p(D) = 0,6 + 0,1 \cdot \frac{8}{9} + 0,3 \cdot \frac{9}{10} = \frac{863}{900} \approx 95,89\%$$

- c) C'est une prob. conditionnelle :

$$p(F | D) = \frac{p(F \cap D)}{p(D)} =$$

$$= \frac{0,6 \cdot \frac{1}{900}}{863/900} = \frac{540}{863} \approx 62,57\%$$

$$d) p(D | \bar{A}) = \frac{p(D \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{0,6 + 0,1 \cdot \frac{8}{9}}{0,6 + 0,1} = \frac{62}{63} \approx 98,41\%$$

$$e) p(8 \text{ CB détectés}) = C_8^{10} \left(\frac{863}{900} \right)^8 \cdot \left(\frac{37}{900} \right)^2 \approx 5,44\%$$

$$f) p(\bar{D} \text{ sur au moins un}) = 1 - p(10 \text{ CB détectés}) = 1 - \left(\frac{863}{900} \right)^{10} \approx 34,28\%$$

$$\pi_2 \cap d: 3(-2) + (-2+2) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -2 \text{ donc}$$

$$\lambda = -1 \text{ et } P(1; -3; 2)$$

$$r_2 = d(P; \alpha) = \frac{|1 - 6 - 4 - 1|}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\text{Et } \|\vec{AP}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{33} \approx 5,74 < r_1 + r_2$$

donc les sphères sont sécantes.

Problème 6 (AL)

$$\begin{aligned} \text{a) } \det(A - xI) &= \begin{vmatrix} 3-x & -4 & 4 \\ 2 & -3-x & 2 \\ -1 & 1 & -2-x \end{vmatrix} = \\ &\stackrel{C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 4 \\ 2 & -1-x & 2 \\ -1 & -1-x & -2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 4 \\ 2 & -1-x & 2 \\ -3 & 0 & -4-x \end{vmatrix} \stackrel{L_3-L_2}{=} \end{aligned}$$

$$= -(1+x) \left((3-x)(-4-x) + 12 \right) = -(1+x)(x^2 + x)$$

$$= -x(x+1)^2. \text{ Donc les vp sont } -1 \text{ et } 0.$$

$$\text{b) } E_0 = \ker A$$

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -L_3 \\ L_2 \\ L_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_1 + L_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\text{donc } z = -k, \quad x = 4k \text{ et } y = 2k. \quad \text{Ainsi}$$

$$E_0 = \left\langle \underbrace{(4; 2; -1)}_{B_0} \right\rangle^{\vec{v}_1}$$

$$E_{-1} : \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $y = k$, $z = l$, $x = k - l$ donc

$$E_{-1} = \left\langle \underbrace{(1; 1; 0)}_{\vec{v}_2}, \underbrace{(-1; 0; 1)}_{\vec{v}_3} \right\rangle \quad \left(\text{c'est le plan } x - y + z = 0 \right).$$

$$c) \quad A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B_d(\alpha)_{B_d}} \quad \text{et} \quad \underbrace{P}_{B(\text{id})_{B_d}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{où } B_d = B_0 \cup B_{-1})$$

$$d) \quad \text{Si } \underline{v} \in E_0, \quad A^2 \underline{v} = A(A\underline{v}) = A \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

$$\text{Si } \underline{v} \in E_{-1}, \quad A^2 \underline{v} = A(A\underline{v}) = A(-\underline{v}) = -A\underline{v} = -(-\underline{v}) = \underline{v}$$

donc les vp de A^2 sont 0 et 1.

A^2 est une projection sur $(\pi) : x - y + z = 0$

en direction de $\underline{v}_3 = (4; 2; -1)$