

Solution 1. (20 points)a) L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$ f s'annule en 1

Tableau du signe de f				
x	1			
$f(x)$	-	0	+	

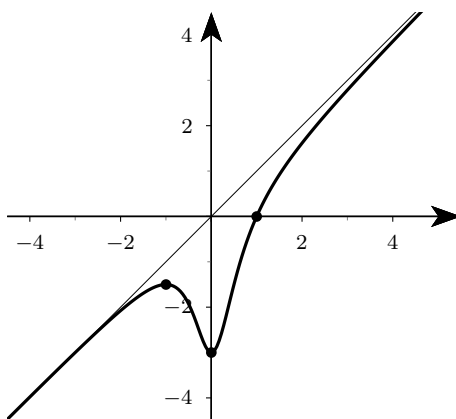
b)
$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 3x^3 \\ -3x^3 + x \\ \hline -x \end{array} & \begin{array}{l} -3 \\ x \\ -3 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x^2 + 1 \\ x \end{array} \quad \text{D'où l'asymptote oblique } y = x \quad \text{coupée en } (-3; -3)$$

c)
$$f'(x) = \frac{9x^2(3x^2 + 1) - 6x(3x^3 - 3)}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{27x^4 + 9x^2 - 18x^4 + 18x}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{9x(x^3 + x + 2)}{(3x^2 + 1)^2}$$

vérification $(x + 1)(x^2 - x + 2) = x^3 + x + 2$
 Le polynôme $x^2 - x + 2$ ne possède pas de zéro

Croissance de f				
x	-1		0	
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	↗ ↘ ↗			

max $(-1; -\frac{3}{2})$ et mim $(0; -3)$

d) Le graphe de f est le suivant :

Solution 2. (12 points)

Minimiser le coût $P = 15xy + 10(2 \cdot 40y + xy + 40x) = 3\,750 + 800y + 2\,500 + 400x$

Sous la contrainte du volume $40xy = 10\,000$ ou $y = \frac{250}{x}$

$$P(x) = 400x + \frac{200'000}{x} + 6250 = P(x)$$

$$P'(x) = 400 - \frac{200'000}{x^2} = \frac{400(x^2 - 500)}{x^2}$$

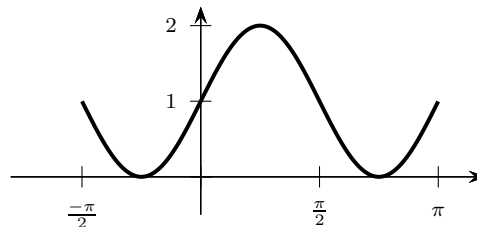
$$P' \text{ s'annule en } \pm\sqrt{500} = \pm 10\sqrt{5}$$

Croissance de P				
x	$-10\sqrt{5}$		$10\sqrt{5}$	
P'(x)	+	0	-	0
P(x)				

Par conséquent, le coût sera minimal si $x = 10\sqrt{5} \cong 22.36$ cm et $y = 5\sqrt{5} \cong 11.18$ cm.

Solution 3. (10 points)

A. a) Le graphe de f est le suivant :



b) L'aire cherchée vaut

$$\int_{-\pi/2}^{\pi} (1 + \sin(2x)) dx = x - \frac{1}{2} \cos(2x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi} = \pi - \frac{1}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - 1 \cong 3.71$$

B. Ce volume est donné par

$$\pi \int_0^7 (x+1)^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3\pi}{5} \sqrt[3]{(x+1)^5} \Big|_0^7 = \frac{3\pi}{5} \cdot (32 - 1) = \frac{93\pi}{5}$$

Solution 4. (10 points)

a) $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$ s'annule si $x = \frac{1}{2}$

Il y a donc un seul point P où la tangente au graphe est horizontale : $P\left(\frac{1}{2}; -\ln(2) - 1\right)$

Croissance de f				
x	0		0,5	
$P'(x)$	−		+ 0 −	
$P(x)$	↘		↗ ↘	

C'est un maximum

b) La courbe $y = g(x)$ coupe l'axe Ox en $Q(2; 0)$.

On a $g'(x) = e^x(x - 2) + e^x \cdot x = e^x(x - 1)$, donc $g'(2) = e^2$.

Ainsi l'équation de la tangente est $(t) : y = e^2 \cdot x - 2e^2$.

L'angle α cherché satisfait $\tan(\alpha) = e^2$ donc $\alpha \cong 82.3^\circ$.

Solution 5. (17 points)

a) On a $(\Sigma) : (x - 8)^2 + (y - 7)^2 + (z - 8)^2 = 27$, donc $\Omega(8; 7; 8)$ et $R = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

$$\delta(\Omega; \pi) = \frac{8 + 7 + 8 - 2}{\sqrt{3}} = \frac{21}{\sqrt{3}} = 7\sqrt{3} > R \text{ donc ne coupe pas}$$

b) Son centre se trouve sur la normale au plan π passant par le centre Ω de la sphère.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Son rayon est la moitié de la différence entre la distance du centre au plan et le rayon de la sphère. $\delta(\Omega; \pi) = \frac{8 + 7 + 8 - 2}{\sqrt{3}} = 7\sqrt{3} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$

Son centre est à la distance $5\sqrt{3}$ de Ω donc $|k| = 5$, le centre $(3; 2; 3)$ et l'équation

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 12$$

c) On vérifie que $(3 - 8)^2 + (8 - 7)^2 + (9 - 8)^2 = 25 + 1 + 1 = 27$, A est sur la sphère et c'est le plan $-5(x - 8) + (y - 7) + (z - 8) = 27$ ou

$$-5x + y + z = 2$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ les plans sont de la forme $y - z = d$ avec $\frac{|7 - 8 - d|}{\sqrt{2}} = \sqrt{27}$ ou $d + 1 = \pm 3\sqrt{6}$ donc

$$y - z = -1 + \sqrt{54} \text{ et } y - z = -1 - 3\sqrt{6}$$

Solution 6. (16 points)

a) $C_{11}^{22} = 705\,432$

b) $C_2^5 \cdot C_4^9 \cdot C_4^6 \cdot C_1^2 = 37\,800$

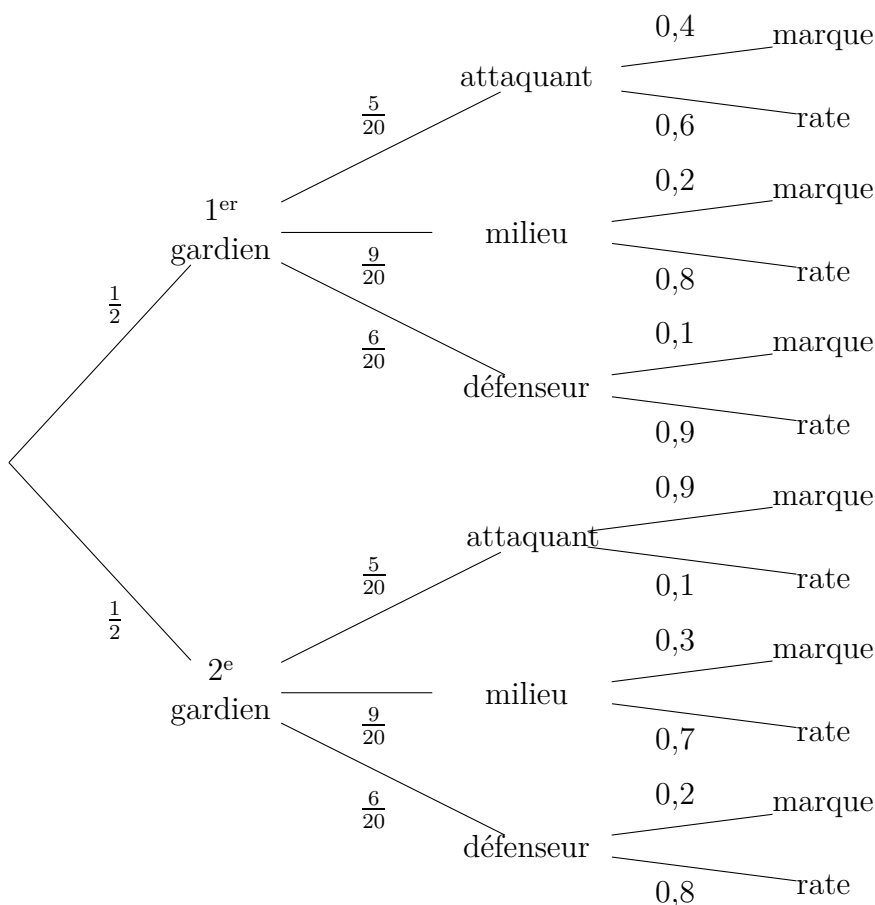
c) $p(\text{marque}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{20} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{20} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{20} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{20} \cdot \frac{2}{10} = \frac{20+18+6+45+27+12}{400} = \frac{128}{400} = 32\%$

d) $p(\text{marque}|\text{attaquant}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{20}} = \frac{13}{20} = 65\%$

e) $p(2^{\text{e}} \text{ gardien}|\text{marque}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{20} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{20} \cdot \frac{2}{10}}{\frac{128}{400}} = \frac{45 + 27 + 12}{128} = \frac{84}{128} = 65,625\%$

f) Il faut que le joueur réussisse 4 ou 5 tirs :

$$C_4^5 \cdot 0.32^4 \cdot 0.68 + C_5^5 \cdot 0.32^5 \cong 3,9\%$$



Solution 7. (20 points)

a) $A \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de rang 2 non inversible

b) $\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ -2 & x & -2 \\ -1 & -2 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ -2 & x & -2 \\ -x & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ -4 & x & -2 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x(x^2 - 2x - 8) = x(x-4)(x+2)$
 A possède 3 valeurs propres distinctes

c) $E_0 = \ker(A) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_4 = \ker \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_{-2} = \ker \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

d) $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

e) $B(Av) = (A^2 + 2A)Av = (A^3 + 2A^2)v = A(A^2 + 2A)v = A(Bv) = A(0) = 0$
