
MATHÉMATIQUES

Matériel autorisé : formulaires officiels non annotés et calculatrices agréées selon liste officielle.

Rédigez complètement les solutions des problèmes proposés ci-dessous.

Les annotations sur les feuilles d'énoncés sont autorisées, mais ne seront pas prises en considération.

Problème 1 (22 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x e^x}{2x - 1}$.

- a) Donner le signe de f .
- b) Déterminer les équations des asymptotes de la fonction f .
- c) Vérifier que $f'(x) = \frac{(2x^2 - x - 1)e^x}{(2x - 1)^2}$ puis étudier la croissance de f .
- d) Esquisser le graphe de f .

Problème 2 (13 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère la fonction f donnée par $f(x) = \cos(2x)$.

- a) Donner l'équation de la tangente t_A au graphe de f au point A $\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$.
- b) Soit B l'autre point où le graphe de f coupe l'axe des x entre 0 et π . Donner l'équation de la tangente t_B au graphe de f en B.
- c) Calculer l'angle aigu que font t_A et t_B .

Partie B

Soit la région limitée par les courbes

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad y = 0; \quad x = 1; \quad x = b \quad (b > 1).$$

- a) Calculer le volume $V(b)$ du solide engendré par la rotation de cette région autour de l'axe des x .
- b) Trouver b sachant que $V(b) = 2\pi$.

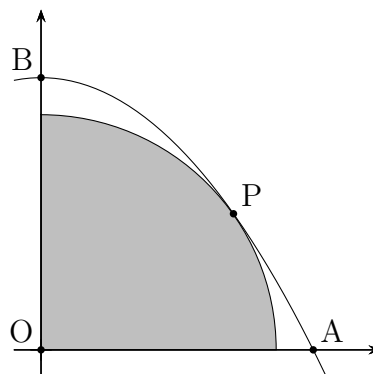
Problème 3 (10 points)

Soit $P(x; y)$ un point de la courbe $y = 1 - x^2$ situé entre $A(1; 0)$ et $B(0; 1)$.

- a) Montrer que l'aire du cercle de centre $O(0; 0)$ passant par P est

$$\pi(x^4 - x^2 + 1).$$

- b) Trouver les coordonnées de P sachant que cette aire est minimale.

**Problème 4** (21 points)

Soit le point $C(10; 2)$ et la droite $t : x + 3y - 36 = 0$.

- a) Écrire l'équation du cercle Γ de centre C qui est tangent à t . Quelles sont les coordonnées du point de contact T de t et Γ ?

Soit ensuite $I(0; 12)$ un point de t .

- b) Il y a deux tangentes à Γ issues de I : la droite t dont on a l'équation et la droite u . Trouver l'équation de u .
- c) Déterminer les équations des bissectrices b_1 et b_2 de t et u .
- d) Former les équations de deux cercles (autres que Γ) tangents à t et u , et de même rayon que Γ .

Problème 5 (15 points)

- a) Déterminer l'équation de la sphère Σ passant par le point $A(8; 7; 9)$ et tangente au plan $\pi : 6x - 8y + 5z + 85 = 0$ au point $T(-4; 7; -1)$.
- b) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m la droite d d'équation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ m \end{pmatrix}$$

est tangente à la sphère Σ .

Problème 6 (15 points)

Les parties A et B sont indépendantes les unes des autres.

Le Texas Hold'em est un poker (le jeu utilisé a 52 cartes) où chaque joueur reçoit dans un premier temps 2 cartes qu'il ne doit pas montrer (ces 2 cartes fermées constituent sa main).

Partie A

On joue au poker Texas Hold'em et la donne commence. Un joueur reçoit deux cartes.

- a) Vérifier que la probabilité que ces 2 cartes forment une paire d'AS est égale à $\frac{1}{221}$.

On a remarqué que certains joueurs ont parfois *un tic nerveux* lorsqu'ils reçoivent une excellente main. Phil est un tel joueur : s'il reçoit une paire d'AS il a toujours *un tic nerveux*; s'il reçoit une paire de ROIS, il l'a deux fois sur trois; s'il reçoit AS-ROI, une fois sur deux. Dans les autres situations, il reste impassible.

- b) Quelle est la probabilité que Phil ait *un tic nerveux*?
- c) Phil a *un tic nerveux*. Calculer la probabilité qu'il ait reçu une paire d'AS.

Partie B

On joue au poker Texas Hold'em et la donne commence. Bill reçoit deux cartes.

- a) Établir que la probabilité qu'il ait reçu une paire vaut $\frac{1}{17}$.

Bill prend part à sept donnes un certain soir.

- b) Quelle est la probabilité qu'il ait reçu une paire exactement deux fois lors des quatre premières donnes, et aucune fois lors des trois dernières?

Problème 7 (17 points)

Une application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est donnée par sa matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 8 \\ -6 & 9 & -8 \\ -12 & 16 & -15 \end{pmatrix}$$

relativement à la base canonique $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

- a) Calculer les valeurs propres et les espaces propres de A.
- b) Expliciter une base e' de $\mathbb{R}^3$ relativement à laquelle la matrice de T est diagonale, puis exprimer T par rapport à cette base.
- c) Comment s'interprète géométriquement l'application linéaire T?
- d) Calculer A^{42} .