Solution 1. (22 points)

a) f est définie si $2\,x-1 \neq 0 \Leftrightarrow 2\,x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$ donc $\mathrm{ED}_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$
f s'annule si $x \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ puisque $e^x > 0$
D'où le signe de f :

x		0		$\frac{1}{2}$	
x	$-$	0	$+$	‖	$+$
e^x	$+$		$+$	‖	$+$
$2\,x-1$	$-$		$-$	‖	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$

b)

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x \cdot e^x}{2\,x-1} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{e}}{0} = \pm\infty$$

Donc la fonction f admet la droite $x = \frac{1}{2}$ comme asymptote verticale

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x \cdot e^x}{2\,x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{2-\frac{1}{x}} = \frac{+0}{2} = +0$$

Donc la fonction f admet la droite $y = 0$ comme asymptote horizontale à gauche

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot e^x}{2\,x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2-\frac{1}{x}} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

Donc la fonction f n'admet aucune asymptote horizontale à droite.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2\,x-1} \text{ est indéterminée de la forme } \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\text{donc par la règle de l'Hospital } = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

Donc la fonction f n'admet aucune asymptote à droite

c)

$$f'(x) = \frac{(e^x + x\,e^x)\,(2\,x-1) - x\,e^x \cdot 2}{(2\,x-1)^2}$$

$$= \frac{(2\,x-1+2\,x^2-x-2\,x)\,e^x}{(2\,x-1)^2} = \frac{2\,x^2-x-1)\,e^x}{(2\,x-1)^2} = \frac{(x-1)\,(2\,x+1)\,e^x}{(2\,x-1)^2}$$

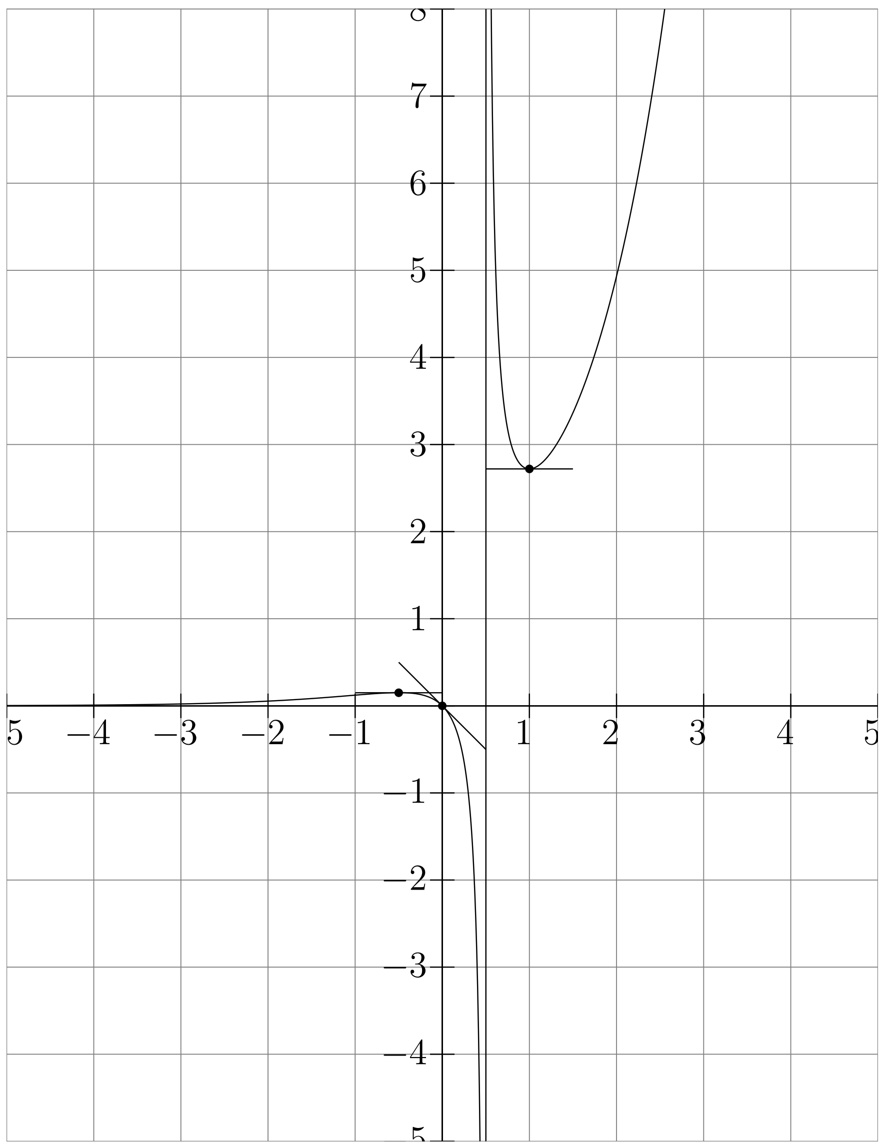
f' s'annule si $x = 1$ ou si $x = -\frac{1}{2}$
D'où le signe de f' et la croissance de f :

x		$-\frac{1}{2}$		0		$frac12$		1	
$x-1$	$-$		$-$		$-$	||	$-$	0	$+$
$2\,x+1$	$-$	0	$+$		$+$	||	$+$		$+$
e^x	$+$		$+$		$+$	||	$+$		$+$
$(2\,x-1)^2$	$+$		$+$		$+$	||	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	||	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	||	$\searrow$		$\nearrow$

$f(-\frac{1}{2}) = \dfrac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}}{-2} = \dfrac{1}{4\sqrt{e}} \simeq 0.15$ c'est un maximum local

$f(1) = \dfrac{1\cdot e}{1} = e \simeq 2.72$ c'est un minimum local

d) On peut encore calculer $f'(0) = \dfrac{-1}{1} = -1$



Solution 2. (13 points)

A.

a) On calcule la dérivée de f

$$f'(x) = -2\,\sin(2\,x)$$

On évalue f et f' en $\frac{\pi}{4}$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \qquad f'(\frac{\pi}{4}) = -2\,\sin(\frac{\pi}{2}) = -2$$

D'où l'équation de la tangente

$$t_{\mathrm{A}} : y - 0 = -2\,(x - \frac{\pi}{4}) \qquad y = -2\,x + \frac{\pi}{2}$$

---

b) On cherche les autres solutions de l'équation $\cos(2\,x) = 0$ autrement dit

$$2\,x = \pm\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\,\pi \qquad x = \pm\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$$

L'autre solution entre 0 et π est donc $\frac{3\pi}{4}$ et le point est $\mathrm{B}(\frac{3\pi}{4};0)$
On évalue f'

$$f'(\frac{3\,\pi}{4}) = -2\,\sin(\frac{3\,\pi}{2}) = 2$$

on en déduit l'équation de la tangente

$$t_{\mathrm{B}} : y - 0 = 2\,(x - \frac{3\,\pi}{4}) \qquad y = 2\,x - \frac{3\,\pi}{2}$$

---

c) $\tan(\alpha) = |\dfrac{2-(-2)}{1+2\cdot(-2)}| = \frac{4}{3}$ d'où $\alpha \simeq 53^\circ$

B.

a) $\mathrm{V}(b) = \pi \displaystyle\int_1^b (\frac{1}{\sqrt{x}})^2\,dx = \pi \in_1^b \frac{1}{x}\,dx = \pi\,\ln(x)|_1^b = \pi\,\ln(b)$

---

b) $\mathrm{V}(b) = 2\,\pi \Leftrightarrow \pi\,\ln(b) = 2\,\pi \Leftrightarrow \ln(b) = 2 \Leftrightarrow b = e^2$

Solution 3. (10 points)

a) Le point P est de coordonnées $\mathrm{P}(x;1-x^2)$
Le rayon du cercle est

$$r = ||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|| = \sqrt{x^2 + (1-x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2\,x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

Donc l'aire de ce cercle est $\mathrm{A}(x) = \pi\, r^2 = \pi\,(x^4 - x^2 + 1)$

---

b) On dérive la fonction $\mathrm{A}(x)$

$$\mathrm{A}'(x) = \pi\,(4\,x^3 - 2\,x) = 2\,\pi\,x\,(2\,x^2 - 1)$$

La dérivée s'annule pour $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
On étudie le signe de A' et la croissance de A pour x variant entre 0 et 3 :

x		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$2\,pi\,x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2\,x^2 - 1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\mathrm{A}'(x)$					$-$	0	$+$
$\mathrm{A}(x)$					$\searrow$		$\nearrow$

L'aire est donc minimale lorsque $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et le point est de coordonnées $\mathrm{P}(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2})$

Solution 4. (21 points)
a) Pour la rayon du cercle on calcule la distance du centre à la tangente :

$$r = \delta(\mathrm{C}; t) = \frac{|10 + 6 - 36|}{\sqrt{1+9}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$$

D'où l'équation du cercle

$$(x - 10)^2 + (y - 2)^2 - 40 = 0$$

Pour le point de contact on utilise le vecteur normal de norme r :

$$\overrightarrow{\mathrm{CT}} = \pm\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

D'où les points $(8; -4) \notin t$ que l'on exclu et $\mathrm{T}(12; 8) \in t$

---

b) L'équation de u est de la forme

$$y - 2 - m\,(x - 10) = \pm 2\sqrt{10}\,\sqrt{1 + m^2}$$

en la faisant passer par I on obtient l'équation

$$10 + 10\,m = \pm 2\sqrt{10}\,\sqrt{1+m^2}$$

que l'on élève au carré

$$100(1 + 2\,m + m^2) = 40 + 40\,m^2$$

autrement dit

$$3\,m^2 + 10\,m + 3 = 0$$

La solution $m = -\frac{1}{3}$ donne t et la solution $m = -3$ donne $u : y = -3\,x + 12$

---

c) On pose les équations des bissectrices

$$\frac{x + 3\,y - 36}{\sqrt{10}} = \frac{3\,x + y - 12}{\sqrt{10}}$$

et on en déduit $b_1 : 4\,x + 4\,y - 48 = 0$ ou $x + y - 12 = 0$ c'est la droite CI
et $b_2 : -2\,x + 2\,y - 24 = 0$ ou $x - y + 12 = 0$ c'est la perpendiculaire à CI par I

---

d) Les centres des 4 cercles solution sont sur les bissectrices et leur rayon est $2\sqrt{10}$. La distance de leur centre aux tangentes est donc $2\sqrt{10}$. Cela donne :

$$\begin{cases} x + y - 12 = 0 \\ \dfrac{x + 3\,y - 36}{\sqrt{10}} = \pm 2\sqrt{10} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x = \pm 10 \\ y = 12 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 12 = 0 \\ \dfrac{x + 3\,y - 36}{\sqrt{10}} = \pm 2\sqrt{10} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x = \pm 5 \\ y = x + 12 \end{cases}$$

On choisit deux solutions parmi

$$(x + 10)^2 + (y - 22)^2 - 40 = 0$$

$$(x - 5)^2 + (y - 17)^2 - 40 = 0$$

$$(x + 5)^2 + (y - 7)^2 - 40 = 0$$

Solution 5. (15 points)
a) La sphère passe par les points A et T donc son centre se situe sur le plan médiateur du segment AT, perpendiculaire à $\overrightarrow{AT}$ et passant par le milieu M du segment :

$$\overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{M}(2; 7; 4)$$

D'où l'équation du plan $6\,x + 5\,z = 32$

Le centre est aussi sur la perpendiculaire au plan tangent par le point de contact. c'est-à-dire la droite

Corrige 2017 3Mr

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

L'intersection donne

$$\begin{cases} x = 6\,k - 4 \\ y = -8\,k + 7 \\ z = 5\,k - 1 \\ 6\,x + 5\,z = 32 \end{cases}$$

en substituant x et z dans la dernière équation

$$36\,k - 24 + 25\,k - 5 = 32 \qquad 61 \underset{\text{ç}}{=} 61 \qquad k = 1$$

D'où le centre $(2; -1; 4)$

Pour le rayon on calcule la distance au plan tangent

$$r = \frac{|12 + 8 + 20 + 85|}{\sqrt{125}} = \sqrt{125}$$

et l'équation de la sphère

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 - 125 = 0$$

---

b) On constate que T, le point de tangence, se situe sur la droite. Donc il suffit de choisir m pour que la droite soit contenue dans le plan tangent, autrement dit pour que le vecteur directeur de la droite soit orthogonal au vecteur normal du plan ou

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ m \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$-10 + 5\,m = 0 \qquad \text{ou} \qquad m = 2$$

Solution 6. (15 points)

A

a) $p(\text{paire d'as}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$

---

b) $p(\text{as-roi ou roi-as}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} + \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{8}{663}$

$$\begin{aligned}p(\text{tic nerveux}) &= p(\text{paire d'as})\cdot p(\text{tic nerveux}|\text{paire d'as})\\ &\quad+p(\text{paire de roi})\cdot p(\text{tic nerveux}|\text{paire de roi})\\ &\quad+p(\text{as-roi})\cdot p(\text{tic nerveux}|\text{as-roi})\\ &= \frac{1}{221}+\frac{1}{221}\cdot\frac{2}{3}+\frac{8}{663}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{221}\simeq 1.36\%\end{aligned}$$

---

c) $p(\text{paire d'as}|\text{tic nerveux}) = \frac{\frac{1}{221}}{\frac{3}{221}} = \frac{1}{3} \simeq 33.33\%$

B

a) $p(\text{paire}) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17} \simeq 5.88\%$

---

b)$p(2 \text{ fois sur } 4 \text{ puis } 0 \text{ fois sur } 3) = \mathrm{C}_2^4(\frac{1}{17})^2(\frac{16}{17})^2(\frac{16}{17})^3 \simeq 1.53\%$

Solution 7. (19 points)

a) On détermine le polynôme caractéristique $\det(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{I})$:

$$\begin{vmatrix}7-\lambda & -8 & 8\\ -6 & 9-\lambda & -8\\ -12 & 16 & -15-\lambda\end{vmatrix}_{\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2\to\mathrm{L}_1} = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1-\lambda & 0\\ -6 & 9-\lambda & -8\\ -12 & 16 & -15-\lambda\end{vmatrix}_{\mathrm{C}_1-\mathrm{C}_2\to\mathrm{C}_1}$$

$$= \begin{vmatrix}0 & 1-\lambda & 0\\ \lambda-15 & 9-\lambda & -8\\ -28 & 16 & -15-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-15 & -8\\ -28 & -15-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(225-\lambda^2-224) = -(\lambda-1)^2\,(\lambda+1)$$

$$\mathrm{E}_1 = \ker\begin{pmatrix}6 & -8 & 8\\ -6 & 8 & -8\\ -12 & 16 & -16\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}3 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \mathcal{L}(\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix})$$

$$\mathrm{E}_{-1} = \ker\begin{pmatrix}8 & -8 & 8\\ -6 & 10 & -8\\ -12 & 16 & -14\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \mathcal{L}(\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix})$$

---

b) base $e' = (\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix})$ et la matrice de T relativement à cette base est $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

---

c) c'est une symétrie par rapport au plan $3\,x-4\,y+4\,z=0$ dans la direction du vecteur $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

---

d) Comme T est une symétrie, T^{42} est l'identité et $\mathrm{A}^{42}=\mathrm{I}$