MATHÉMATIQUES (durée 4 heures)

Matériel autorisé : formulaires officiels non annotés et calculatrices agréées selon liste officielle.

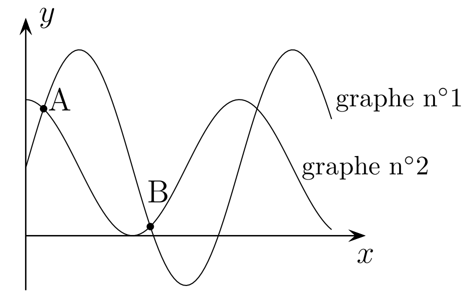
Rédigez complètement les solutions des problèmes proposés ci-dessous.
Les annotations sur les feuilles d'énoncés sont autorisées, mais ne seront pas prises en considération.

Problème 1 (16 points)
Étudier la fonction f définie par $f(x) = (2\,x - x^2)\,e^x$.
On demande : le signe de f, les équations des asymptotes, la croissance de f, les coordonnées des points qui correspondent aux extremums de f et le graphe de f.

Problème 2 (10 points)
On a représenté ci-contre le graphe des fonctions

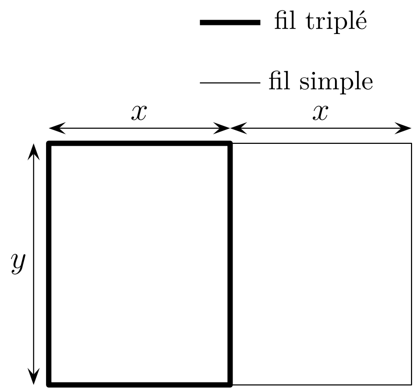
$$f(x) = \cos(2\,x) + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{3}\,\sin(2\,x) + 1$$

sur l'intervalle $[0, 2\,\pi]$.



a) Attribuer un graphe à f et l'autre à g. Justifier.
b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B.
c) Calculer l'aire de la région limitée par les courbes $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

Problème 3 (10 points)
Un éleveur de bovins désire délimiter deux enclos rectangulaires de même surface : le premier pour les taureaux, le second pour les vaches et les jeunes. Pour que son installation soit certifiée *élevage bio en plein air*, la surface totale des deux enclos doit être de $11\,200\,\mathrm{m}^2$. Les deux enclos seront accolés l'un à l'autre et auront la même largeur. Celui des taureaux sera entouré d'un fil de fer barbelé triplé. Celui des vaches et des jeunes sera délimité par un fil barbelé simple sur les trois côtés non attenants au pré des taureaux.



Déterminer les dimensions des deux enclos pour que l'éleveur utilise une longueur minimale de fil barbelé.

Problème 4 (10 points)
On considère la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Calculer une primitive de la fonction f.
b) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $x = 1$.

Problème 5 (19 points)
On donne le plan $\alpha : 5\,x - 8\,y - 17\,z + 189 = 0$, les points $\mathrm{C}\,(4;-2;-9)$ et $\mathrm{R}\,(14;-2;1)$ ainsi que la droite $b : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les coordonnées du point d'intersection D de la droite b et du plan α.
b) Déterminer une équation du plan médiateur μ du segment CR.
c) Montrer que le point C est équidistant du plan α et de la droite b. En déduire l'équation de la sphère Σ de centre C tangente au plan α et à la droite b.
d) Déterminer les équations des plans tangents à la sphère Σ qui sont perpendiculaires à la droite b.
e) Calculer les coordonnées du symétrique S du point C par rapport au plan α.

Problème 6 (15 points)
Les sœurs Venus et Serena s'affrontent aux sports de raquettes.

- Au ping-pong, Venus a 80% de chance de gagner.
- Au badminton, Serena a 75% de chance de gagner.
- Au tennis, c'est plus équitable : Serena a 55% de chances de gagner.

L'affrontement consiste en un match de trois manches s'arrêtant aussitôt que l'une des joueuses gagne deux manches. La première manche se joue au tennis. Ensuite, la **perdante** de la première manche choisit, pour la deuxième manche, la discipline dans laquelle elle a le plus de chance de gagner. Si une troisème manche est nécessaire, elle se joue dans la dernière discipline non encore choisie.

a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre.
b) Calculer la probabilité que Venus gagne les deux premières manches.
c) Calculer la probabilité que Venus gagne l'affrontement.
d) Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de troisième manche.
e) Sachant que Serena a gagné l'affrontement, calculer la probabilité qu'elle ait gagné la première manche.
f) En imaginant que les deux sœurs s'affrontent de la sorte une fois par mois pendant une année, calculer la probabilité que Serena gagne exactement sept fois sur l'année.

Problème 7 (20 points)
Soit la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ d'une transformation linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

a) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles la matrice M est inversible.
b) Donner une base de l'image de g lorsque $x = 1$.

Posons maintenant $x = 0$ et considérons la transformation linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Calculer le polynôme caractéristique de A et les valeurs propres de A.
d) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A^2. La matrice A^2 est-elle diagonalisable ? Justifier.
e) Calculer A^4, puis A^{2018}.