Problème 1 (17 points)

Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2\,x^3}{x^2 - 2\,x + 1}$.

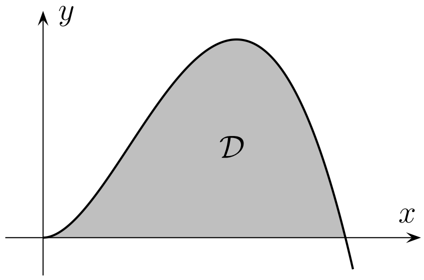
On demande : le signe de f, les équations des asymptotes, la croissance de f, les coordonnées des extremums de f et le graphe de f.

Problème 2 (13 points)
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A
On considère la fonction f définie par

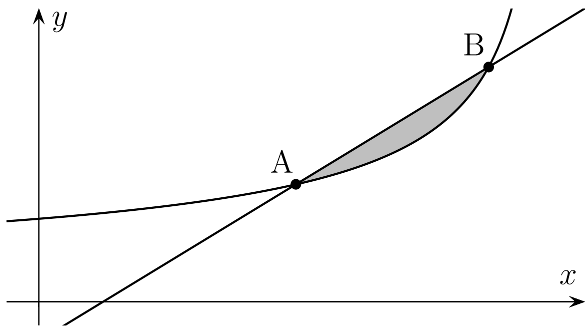
$$f(x) = 2\,x^2 - x^2\,\sqrt{x}.$$

a) Donner les zéros de la fonction f.
b) Déterminer l'aire du domaine borné $\mathcal{D}$ délimité par le graphe de la fonction f et l'axe horizontal.



Partie B
On considère les fonctions g et h définies par $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{8-x}}$ et $h(x) = \dfrac{1}{3}\,(x-1)$.

c) Soient $\mathrm{A}(a_1; a_2)$ et $\mathrm{B}(b_1; b_2)$ les points d'intersection des graphes de ces deux fonctions.
   – Vérifier que $a_1 = 4$ et que $b_1 = 7$.
   – Calculer a_2 et b_2.
d) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe horizontal du domaine borné délimité par le graphe de ces deux fonctions.

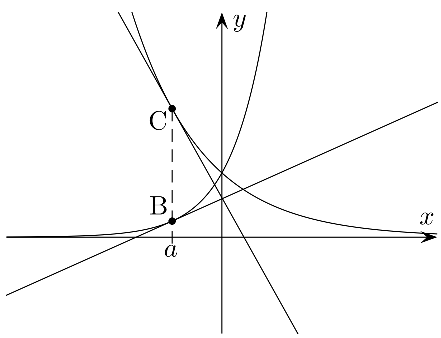


Problème 3 (9 points)
Considérons les fonctions f et g définies par $f(x) = e^{2\,x}$ et $g(x) = e^{-x}$.

a) Soit P le point d'intersection des graphes des fonctions f et g. Déterminer les pentes des tangentes aux graphes de f et de g en P. En déduire l'angle aigu formé par ces tangentes.
b) Ci-contre les graphes des fonctions f et g.

   Quelles sont les coordonnées des points B et C, alignés verticalement, sachant que les tangentes en ces points aux graphes de f et de g sont perpendiculaires ?

   Indication : deux droites, de pente m_1 et m_2, sont perpendiculaires si et seulement si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

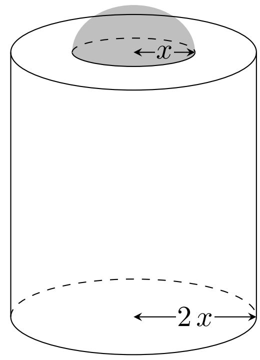


Problème 4 (10 points)

Le solide S est formé d'un cylindre de rayon $2\,x$ et de hauteur y sur lequel est posé une demi-sphère de rayon x.

La somme de la hauteur du cylindre et du rayon de la demi-sphère est égale à 5.

Déterminer x et y de sorte que le volume du solide S soit maximal.



Problème 5 (13 points)
On donne les points $A(15; 2; -1)$, $B(5; 2; 4)$, $C(14; 0; 0)$ et $P(10; -2; 13)$.

a) Donner une équation cartésienne de α, le plan passant par les points A, B et C.

b) Donner une équation de d, la droite perpendiculaire au plan α et passant par P.

c) Déterminer l'intersection de la droite d et du plan α.

d) Donner l'équation de la sphère Σ_1, centrée en P et tangente au plan α.

e) Déterminer l'équation de la sphère Σ_2 passant par P et tangente à la fois à Σ_1 et au plan α.

Problème 6 (15 points)
Bertrand doit choisir quelles variétés de graines semer dans son potager. Au magasin, il y a dix variétés de graines.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

a) Bertrand décide d'acheter trois variétés de graines. Combien a-t-il de choix ?

b) Dans les six emplacements de son potager, Bertrand veut semer des carottes dans trois emplacements, des courges dans deux emplacements et des radis dans un emplacement. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

Partie B

On sait que 60 % des saisons sont favorables aux cultures. De plus, si la saison est favorable, les légumes ont 90 % de chance de bien pousser, contre 75 % de chance dans le cas contraire. Enfin, si les légumes ont bien poussé, le voisin de Bertrand vient chaparder ses légumes, une fois sur cinq si la saison a été favorable, une fois sur trois si la saison a été défavorable.

c) Vérifier que la probabilité que les légumes aient mal poussé est de 16 %.

d) Quelle est la probabilité que le voisin de Bertrand vienne chaparder ses légumes ?

e) Sachant que les légumes ont mal poussé, quelle est la probabilité que la saison ait été défavorable ?

f) Bertrand s'est occupé d'un potager pendant dix saisons. Quelle est la probabilité que ses légumes aient bien poussé au moins neuf fois ?

Problème 7 (18 points)
Une application linéaire $\alpha_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est donnée, relativement à la base canonique, par la matrice

$$\mathrm{A}_k = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 6 & k & -2 \\ -18 & 6 & k+8 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles α_k n'est pas inversible.

On pose $k = 0$ et on note $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0$.

b) Déterminer une base du noyau de A et une base de l'image de A.

c) Déterminer une matrice P de façon à ce que la matrice $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit diagonale. Donner également la matrice D.

d) Déterminer les valeurs propres et une base de chaque espace propre de la matrice A^4 (sans calculer cette matrice).