Solution 1. (20 points)

a) f est définie si $2\,x-1 \neq 0 \Leftrightarrow 2\,x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$ donc $\mathrm{ED}_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$
f s'annule si $x \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ puisque $e^x > 0$
D'où le signe de f :

x		0		$\frac{1}{2}$	
x	$-$	0	$+$	‖	$+$
e^x	$+$		$+$	‖	$+$
$2\,x-1$	$-$		$-$	‖	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$

---

b)

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x \cdot e^x}{2\,x-1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{e}}{0} = \pm\infty$$

Donc la fonction f admet la droite $x = \frac{1}{2}$ comme asymptote verticale

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x \cdot e^x}{2\,x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{2-\frac{1}{x}} = \frac{+0}{2} = +0$$

Donc la fonction f admet la droite $y = 0$ comme asymptote horizontale à gauche

---

c) f' s'annule si $x = 1$ ou si $x = -\frac{1}{2}$
D'où le signe de f' et la croissance de f :

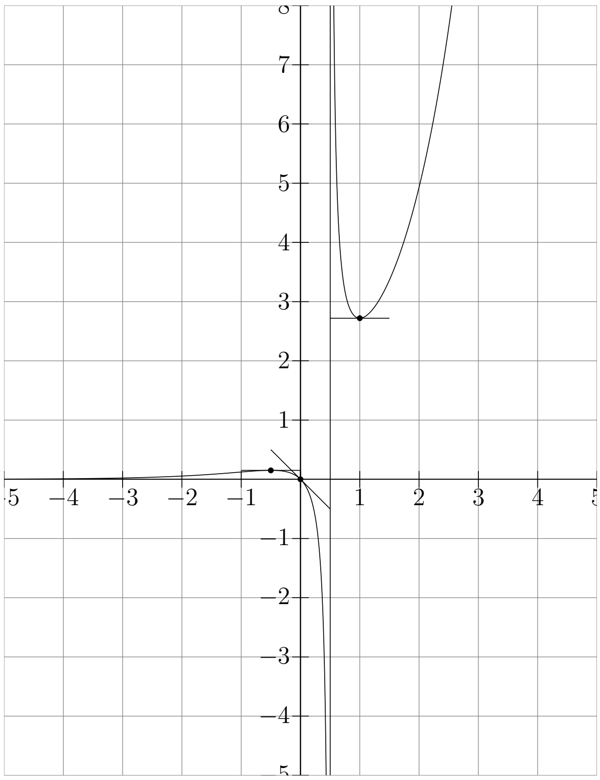
x		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1	
$x-1$	$-$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$
$2\,x+1$	$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$		$+$
e^x	$+$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$
$(2\,x-1)^2$	$+$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	‖	$\searrow$		$\nearrow$

$f(-\frac{1}{2}) = \dfrac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}}}{-2} = \dfrac{1}{4\sqrt{e}} \simeq 0.15$ donc $(-0.5; 0.15)$ est un maximum local

$f(1) = \dfrac{1 \cdot e}{1} = e \simeq 2.72$ donc $(1, 2.72)$ est un minimum local

---

d) On peut encore calculer $f'(0) = \dfrac{-1}{1} = -1$



e)

$$f'(x) = \frac{(e^x + x\,e^x)\,(2\,x-1) - x\,e^x \cdot 2}{(2\,x-1)^2}$$

$$= \frac{(2\,x - 1 + 2\,x^2 - x - 2\,x)\,e^x}{(2\,x-1)^2} = \frac{(2\,x^2 - x - 1)\,e^x}{(2\,x-1)^2} = \frac{(x-1)\,(2\,x+1)\,e^x}{(2\,x-1)^2}$$

Solution 2. (10 points)

a) Le point P est de coordonnées $\mathrm{P}(x; 1 - x^2)$

Le rayon du cercle est

$$r = ||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|| = \sqrt{x^2 + (1-x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2\,x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

Donc l'aire de ce cercle est $\mathrm{A}(x) = \pi\,r^2 = \pi\,(x^4 - x^2 + 1)$

b) On dérive la fonction $\mathrm{A}(x)$

$$\mathrm{A}'(x) = \pi\,(4\,x^3 - 2\,x) = 2\,\pi\,x\,(2\,x^2 - 1)$$

La dérivée s'annule pour $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

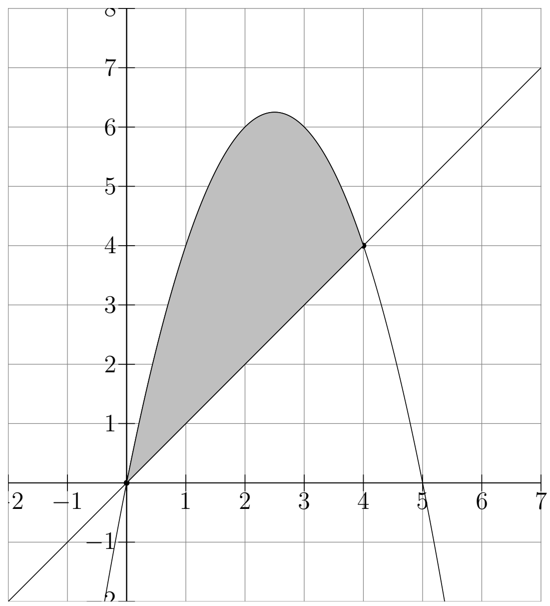
On étudie le signe de A' et la croissance de A pour x variant entre 0 et 3 :

x		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	
$2\,\pi\,x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2\,x^2-1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\mathrm{A}'(x)$					$-$	0	$+$
$\mathrm{A}(x)$					$\searrow$		$\nearrow$

L'aire est donc minimale lorsque $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et le point est de coordonnées $\mathrm{P}(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2})$

Solution 3. (10 points)

a) On calcule les intersections $5\,x - x^2 = x \Leftrightarrow x(x-4) = 0$ donc $\mathrm{P}(0,0)$ et $\mathrm{Q}(4;4)$



---

b)

$$\mathrm{A} = \int_0^4 (5\,x - x^2 - x)\,dx = \int_0^4 (4\,x - x^2)\,dx = 2\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

c) Γ est le graphe de la fonction $f(x) = 5\,x - x^2$ et $\mathrm{T} \in \Gamma$ car $f(2) = -4 + 10 = 6$ $f'(x) = -2\,x + 5$ donne la pente de la tangente au point T : $f'(2) = -4 + 5 = 1$ la droite $d : y = x$ est aussi de pente 1, ce qui montre le parallélisme

---

Solution 4. (14 points)
A.
a) On calcule la dérivée de f

$$f'(x) = -2\,\sin(2\,x)$$

On évalue f et f' en $\frac{\pi}{4}$

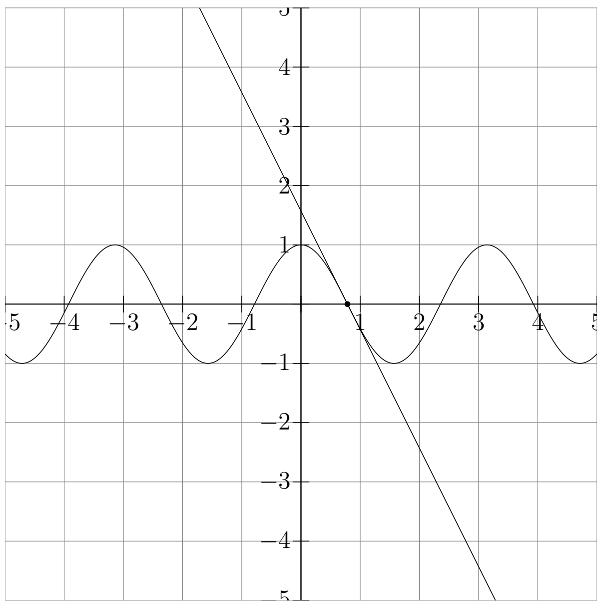
$$f(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \qquad f'(\frac{\pi}{4}) = -2\,\sin(\frac{\pi}{2}) = -2$$

D'où l'équation de la tangente

$$t_{\mathrm{A}} : y - 0 = -2\,(x - \frac{\pi}{4}) \qquad y = -2\,x + \frac{\pi}{2}$$

---

b)



c) Si α désigne l'angle orienté entre l'axe des x et t_{A}, $tan(\alpha) = -2$ donc $\alpha \simeq -63.43^{\circ}$

On en déduit que l'angle recherché est $90^{\circ} - 63.43^{\circ} = 26.57^{\circ}$

B.
a) $\mathrm{V}(b) = \pi \displaystyle\int_1^b (\frac{1}{\sqrt{x}})^2\, dx = \pi \in_1^b \frac{1}{x}\, dx = \pi\ \ln(x)|_1^b = \pi\ \ln(b)$

---

b) $\mathrm{V}(b) = 2\,\pi \Leftrightarrow \pi\ \ln(b) = 2\,\pi \Leftrightarrow \ln(b) = 2 \Leftrightarrow b = e^2$

Solution 5. (18 points)
a) Pour le rayon du cercle on calcule la distance du centre à la tangente :

$$r = \delta(\mathrm{C}; t) = \frac{|10 + 6 - 36|}{\sqrt{1+9}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$$

D'où l'équation du cercle

$$(x - 10)^2 + (y - 2)^2 - 40 = 0$$

Pour le point de contact on utilise le vecteur normal de norme r :

$$\overrightarrow{\mathrm{CT}} = \pm\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

D'où les points $(8; -4) \notin t$ que l'on exclu et $\mathrm{T}(12; 8) \in t$

---

b) L'équation de u est de la forme

$$y - 2 - m\,(x - 10) = \pm 2\sqrt{10}\,\sqrt{1 + m^2}$$

en la faisant passer par I on obtient l'équation

$$10 + 10\,m = \pm 2\sqrt{10}\,\sqrt{1 + m^2}$$

que l'on élève au carré

$$100(1 + 2\,m + m^2) = 40 + 40\,m^2$$

autrement dit

$$3\,m^2 + 10\,m + 3 = 0$$

La solution $m = -\frac{1}{3}$ donne t et la solution $m = -3$ donne u : $y = -3\,x + 12$

---

c) On pose les équations des bissectrices

$$\frac{x+3\,y-36}{\sqrt{10}} = \frac{3\,x+y-12}{\sqrt{10}}$$

et on en déduit b_1 : $4\,x+4\,y-48=0$ ou $x+y-12=0$ c'est la droite CI
et b_2 : $-2\,x+2\,y-24=0$ ou $x-y+12=0$ c'est la perpendiculaire à CI par I

---

d) Les centres des 4 cercles solution sont sur les bissectrices et leur rayon est $2\sqrt{10}$. La distance de leur centre aux tangentes est donc $2\sqrt{10}$. Cela donne :

$$\begin{cases} x+y-12=0 \\ \dfrac{x+3\,y-36}{\sqrt{10}} = \pm 2\sqrt{10} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x = \pm 10 \\ y = 12-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+12=0 \\ \dfrac{x+3\,y-36}{\sqrt{10}} = \pm 2\sqrt{10} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x = \pm 5 \\ y = x+12 \end{cases}$$

On choisit une solutions parmi

$$(x+10)^2+(y-22)^2-40=0$$

$$(x-5)^2+(y-17)^2-40=0$$

$$(x+5)^2+(y-7)^2-40=0$$

Solution 6. (18 points)
A

$$\frac{10!}{4!\,2!} = 75600$$

B
a) $p(\text{paire d'as}) = \frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51} = \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{17} = \frac{1}{221}$

---

b) $p(\text{as-roi ou roi-as}) = \frac{4}{52}\cdot\frac{4}{51}+\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{51} = \frac{8}{663}$

$$\begin{aligned} p(\text{tic nerveux}) &= p(\text{paire d'as})\cdot p(\text{tic nerveux}|\text{paire d'as}) \\ &\quad +p(\text{paire de roi})\cdot p(\text{tic nerveux}|\text{paire de roi}) \\ &\quad +p(\text{as-roi})\cdot p(\text{tic nerveux}|\text{as-roi}) \\ &= \frac{1}{221}+\frac{1}{221}\cdot\frac{2}{3}+\frac{8}{663}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{221} \simeq 1.36\% \end{aligned}$$

c) $p(\text{paire d'as}|\text{tic nerveux}) = \frac{\frac{1}{221}}{\frac{3}{221}} = \frac{1}{3} \simeq 33.33\%$

C

a) $p(\text{paire}) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17} \simeq 5.88\%$

b)$p(\text{2 fois sur 4 puis 0 fois sur 3}) = \mathrm{C}_2^4(\frac{1}{17})^2(\frac{16}{17})^2(\frac{16}{17})^3 \simeq 1.53\%$