MATHÉMATIQUES (durée 4 heures)

Matériel autorisé : formulaires officiels non annotés et calculatrices agréées selon liste officielle.

Rédigez complètement les solutions des problèmes proposés ci-dessous.
Les annotations sur les feuilles d'énoncés sont autorisées, mais ne seront pas prises en considération.

Problème 1 (16 points)

Étudier la fonction f définie par $f(x) = (2\,x - x^2)\,e^x$.

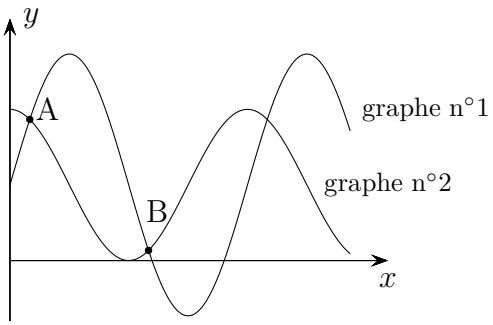
On demande : le signe de f, les équations des asymptotes, la croissance de f, les coordonnées des points qui correspondent aux extremums de f et le graphe de f.

Problème 2 (10 points)

On a représenté ci-contre le graphe des fonctions

$$f(x) = \cos(2\,x) + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{3}\,\sin(2\,x) + 1$$

sur l'intervalle $[0, 2\,\pi]$.



a) Attribuer un graphe à f et l'autre à g. Justifier.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B.

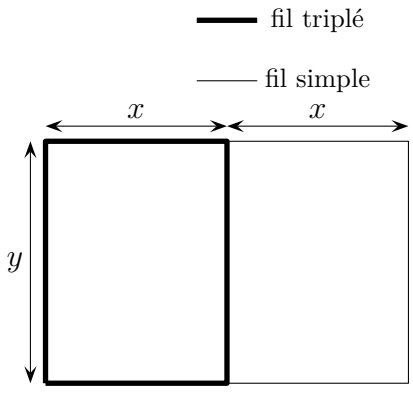
Rappel : $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

c) Calculer l'aire de la région limitée par les courbes

$$y = f(x), \quad y = g(x), \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Problème 3 (10 points)

Un éleveur de bovins désire délimiter deux enclos rectangulaires de même surface : le premier pour les taureaux, le second pour les vaches et les jeunes. Pour que son installation soit certifiée *élevage bio en plein air*, la surface totale des deux enclos doit être de 11 200 m^2. Les deux enclos seront accolés l'un à l'autre et auront la même largeur. Celui des taureaux sera entouré d'un fil de fer barbelé triplé. Celui des vaches et des jeunes sera délimité par un fil barbelé simple sur les trois côtés non attenants au pré des taureaux.



Déterminer les dimensions des deux enclos pour que l'éleveur utilise une longueur minimale de fil barbelé.

Problème 4 (10 points)

On considère la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Calculer une primitive de la fonction f.

b) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $x = 1$.

Problème 5 (19 points)

On donne les droites $a : 7\,x - y - 24 = 0$ et $b : x - 7\,y - 24 = 0$ ainsi que les points C$(8; 2)$ et R$(4; 10)$.

a) Déterminer une équation de la médiatrice m du segment CR.

b) Montrer que le point C est équidistant des droites a et b. Déterminer une équation du cercle Γ de centre C tangent aux droites a et b.

c) Déterminer les équations des tangentes au cercle Γ qui sont perpendiculaires à la droite b.

d) Déterminer les équations des bissectrices des droites a et b.

e) On appelle g la bissectrice qui passe par l'origine O$(0; 0)$. Calculer les coordonnées du symétrique S de C par rapport à g.

f) Calculer les coordonnées du point d'intersection D des droites m et g. Déterminer ensuite une équation du cercle Γ' passant par les points C, R et S.

Problème 6 (15 points)

Les sœurs Venus et Serena s'affrontent aux sports de raquettes.

- Au ping-pong, Venus a 80% de chance de gagner.
- Au badminton, Serena a 75% de chance de gagner.
- Au tennis, c'est plus équitable : Serena a 55% de chances de gagner.

L'affrontement consiste en un match de trois manches s'arrêtant aussitôt que l'une des joueuses gagne deux manches. La première manche se joue au tennis. Ensuite, la **perdante** de la première manche choisit, pour la deuxième manche, la discipline dans laquelle elle a le plus de chance de gagner. Si une troisème manche est nécessaire, elle se joue dans la dernière discipline non encore choisie.

a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre.

b) Vérifier que la probabilité que Venus gagne les deux premières manches est de 11,25 %.

c) Calculer la probabilité que Venus gagne l'affrontement.

d) Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de troisième manche.

e) Sachant que Serena a gagné l'affrontement, calculer la probabilité qu'elle ait gagné la première manche.

f) En imaginant que les deux sœurs s'affrontent de la sorte une fois par mois pendant une année, calculer la probabilité que Serena gagne exactement sept fois sur l'année.