**Solution 1.** (16 points)

$f$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f$ s'annule si $2\,x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}$ puisque $e^x > 0$
D'où le signe de $f$ :

| $x$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$$\lim_{x \to -\infty} (2\,x - x^2)\,e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{2\,x - x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - 2\,x}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{e^{-x}} = -0$$

Donc la fonction $f$ admet la droite $y = 0$ comme asymptote horizontale à gauche.

$$\lim_{x \to +\infty} (2\,x - x^2)\,e^x = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{(2\,x - x^2)\,e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} (2 - x)\,e^x = -\infty$$

Donc la fonction $f$ n'admet aucune asymptote à droite : ni horizontale ni oblique.

$$f'(x) = (2 - 2\,x)\,e^x + (2\,x - x^2)\,e^x = (2 - x^2)\,e^x$$

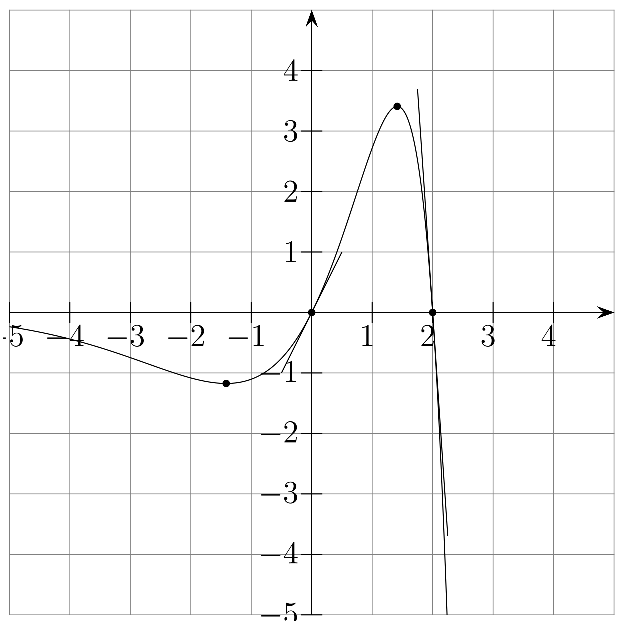
$f'$ s'annule si $x = \pm\sqrt{2}$. D'où le signe de $f'$ et la croissance de $f$ :

| $x$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

$f(-\sqrt{2}) = (-2\,\sqrt{2} - 2)\,e^{-\sqrt{2}} \simeq -1.174$ c'est un minimum local.

$f(\sqrt{2}) = (2\,\sqrt{2} - 2)\,e^{\sqrt{2}} \simeq 3.408$ c'est un maximum local.

On peut encore calculer $f'(0) = 2$ et $f'(2) \simeq -14.778$.



**Solution 2.** (10 points)

a) $f(0) = 2 > g(0) = 1$ donc le graphe no 1 est celui de $f$.

b) $\cos(2\,x) + 1 = \sqrt{3}\,\sin(2\,x) + 1 \Leftrightarrow \tan(2\,x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2\,x = \frac{\pi}{6} + k\,\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\,\frac{\pi}{2}$

$f(\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{6}) + 1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \simeq 1.866$ d'où A$(0.262; 1.866)$

$f(\frac{7\pi}{12}) = \cos(\frac{7\pi}{6}) = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \simeq 0.134$ d'où B$(1.833; 0.134)$

c) La région se situe entre les points A et B. Le graphe de $f$ se situe au-dessus de celui de $g$.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3}\,\sin(2\,x) - \cos(2\,x)\,dx = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos(2\,x) - \frac{1}{2}\,\sin(2\,x)\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos(\pi) - \frac{1}{2}\,\sin(\pi) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\,\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \simeq 1.366$$

**Solution 3.** (10 points)

Contrainte $2\,x \cdot y = 11200$ ou $y = \dfrac{5600}{x}$

Longueur du barbelé $3\,(2\,x + 2\,y) + 2\,x + y = 8\,x + 7\,y$

Fonction à optimiser $f(x) = 8\,x + \dfrac{39200}{x}$

Dérivée $f'(x) = 8 - \dfrac{39200}{x^2} = \dfrac{8\,(x^2 - 4900)}{x^2}$

Croissance pour $x \in ]0; +\infty[$

| $x$ | $-70$ | $0$ | | $70$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

Minimum lorsque $x = 70$ et $y = 80$.

L'éleveur utilise le moins de barbelé lorsque les dimensions des enclos sont de 70 m sur 80 m.

**Solution 4.** (10 points)

a)
$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & & & x+1 \\ \cline{4-4} -x^2 & -x & & x-1 \\ \cline{1-2} & -x & & \\ & x & +1 & \\ \cline{2-3} & & 1 & \end{array}$$
d'où $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - x + \ln|x+1|$$

b) $f'(x) = \dfrac{2\,x\cdot(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2\,x}{(x+1)^2}$

$f(1) = \frac{1}{2}$ et $f'(1) = \frac{3}{4}$ d'où l'équation de la tangente

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\,(x-1) \Leftrightarrow 3\,x - 4\,y - 1 = 0$$

**Solution 5.** (19 points)

a) $\begin{cases} x = 4\,k - 12 \\ y = k \\ z = 3\,k + 3 \\ 5\,x - 8\,y - 17\,z + 189 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\,k - 12 \\ y = k \\ z = 3\,k + 3 \\ 20\,k - 60 - 8\,k - 51\,k - 51 + 189 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\,k - 12 \\ y = k \\ z = 3\,k + 3 \\ -39\,k + 78 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ z = 9 \\ k = 2 \end{cases}$ d'où $\mathrm{D}(-4; 2; 9)$

b) vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ point milieu $\mathrm{M}(9; -2; -4)$ d'où

$$\mu : x + z = 5$$

c) $\delta(\mathrm{C}; \alpha) = \dfrac{|20 + 16 + 153 + 189|}{\sqrt{25 + 64 + 289}} = \dfrac{378}{\sqrt{378}} = \sqrt{378}$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{CA}} \times \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 96 \\ -24 \end{pmatrix}$

$||\overrightarrow{\mathrm{CA}} \times \overrightarrow{d}\,|| = \sqrt{36 + 9216 + 576} = \sqrt{9828}$

$$\delta(\mathrm{C}; b) = \frac{||\overrightarrow{\mathrm{CA}} \times \overrightarrow{d}\,||}{||\overrightarrow{d}\,||} = \frac{\sqrt{9828}}{\sqrt{16 + 1 + 9}} = \sqrt{378}$$

$$\Sigma : (x-4)^2 + (y+2)^2 + (z+9)^2 - 378 = 0$$

d) plans $\pi : 4\,x + y + 3\,z + d = 0$ avec $\delta(\mathrm{C};\pi) = \sqrt{378} \Leftrightarrow \dfrac{|16 - 2 - 27 + d|}{\sqrt{16+1+9}} = \sqrt{378}$

$$\Leftrightarrow d - 13 = \pm\sqrt{9828} \text{ et } 4\,x + y + 3\,z + 13 \pm \sqrt{9828} = 0$$

e) La perpendiculaire à $\alpha$ par C coupe $\alpha$ en

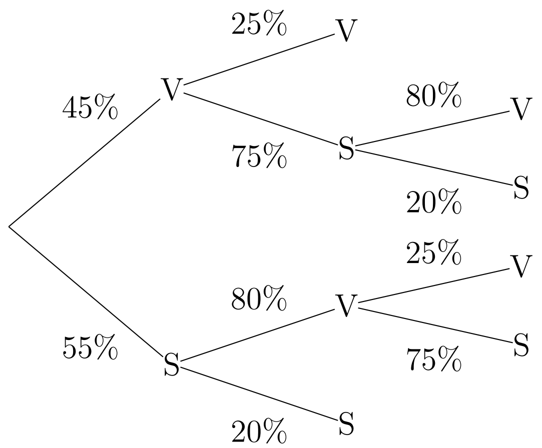
$$\begin{cases} x = 5\,k + 4 \\ y = -8\,k - 2 \\ z = -17\,k - 9 \\ 5\,x - 8\,y - 17\,z + 189 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5\,k + 4 \\ y = -8\,k - 2 \\ z = -17\,k - 9 \\ 25\,k + 20 + 64\,k + 16 + 289\,k + 153 + 189 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5\,k + 4 \\ y = -8\,k - 2 \\ z = -17\,k - 9 \\ 389\,k + 389 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \\ z = 8 \\ k = -1 \end{cases} \quad \text{d'où I}(-1; 6; 8)$$

et le symétrique $\mathrm{S}(-6; 14; 25)$

**Solution 6.** (15 points)

a)




b) $\mathrm{P(VV)} = 0.45 \cdot 0.25 = 11.25\%$

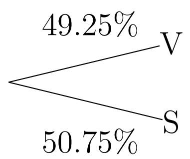
c) $\mathrm{P(VV \cup VSV \cup SVV)} = 0.45 \cdot 0.25 + 0.45 \cdot 0.75 \cdot 0.8 + 0.55 \cdot 0.8 \cdot 0.25 = 49.25\%$

d) $\mathrm{P(VV \cup SS)} = 0.45 \cdot 0.25 + 0.55 \cdot 0.2 = 22.25\%$

e) $\mathrm{P(SVV \cup SVS \cup SS | VSS \cup SVS \cup SS)} = \dfrac{\mathrm{P(SVS \cup SS)}}{\mathrm{P(VSS \cup SVS \cup SS)}}$

$$= \frac{0.55 \cdot 0.8 \cdot 0.75 + 0.55 \cdot 0.2}{0.45 \cdot 0.75 \cdot 0.2 + 0.55 \cdot 0.8 \cdot 0.75 + 0.55 \cdot 0.2} = \frac{0.44}{0.5075} = 86.7\%$$

f)




$$\mathrm{P}(5\,\mathrm{V}\ 7\,\mathrm{S}) = \frac{12!}{7! \cdot 5!} \cdot 0.4925^5 \cdot 0.5075^7 = 19.9\%$$

**Solution 7.** (20 points)

a) $\det(\mathrm{M}) = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-x & -1 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x(1-x)$

M est inversible si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$

b) Dans ce cas, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 et $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de l'image.

c) $\det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda\,(1-\lambda)\,(1+\lambda)$

La matrice A admet les valeurs propres $\lambda = 0; 1; -1$.

d) La matrice $\mathrm{A}^2$ admet les valeurs propres $\lambda = 0; 1$.

$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{E}_0 = \ker(\mathrm{A}^2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$

$\mathrm{E}_1 = \ker(\mathrm{A}^2 - \mathrm{I}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$

La matrice A est diagonalisables car $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de vecteurs propres.

e) $\mathrm{A}^4 = \mathrm{A}^{2018} = \mathrm{A}^2$

car $\mathrm{A}^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$