Corrige 2019 3Mr

Solution 1. (18 points)

La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et f s'annule si $2\,x^3 = 0$, donc en $x = 0$.
Le signe de f est le suivant

x		0		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$

S'il y a une AV, c'est en $x = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\,x^3}{(x-1)^2} = \infty$, la fonction f admet la droite $x = 1$ comme asymptote verticale.

Comme le numérateur est de degré un de plus que le dénominateur, il y a une AO (que l'on peut obtenir par division euclidienne par exemple), d'équation $y = 2x + 4$.

La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = \frac{6x^2(x-1)^2 - 2x^3(2x-2)}{(x-1)^4} = \frac{6x^2(x-1) - 4x^3}{(x-1)^3} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$$

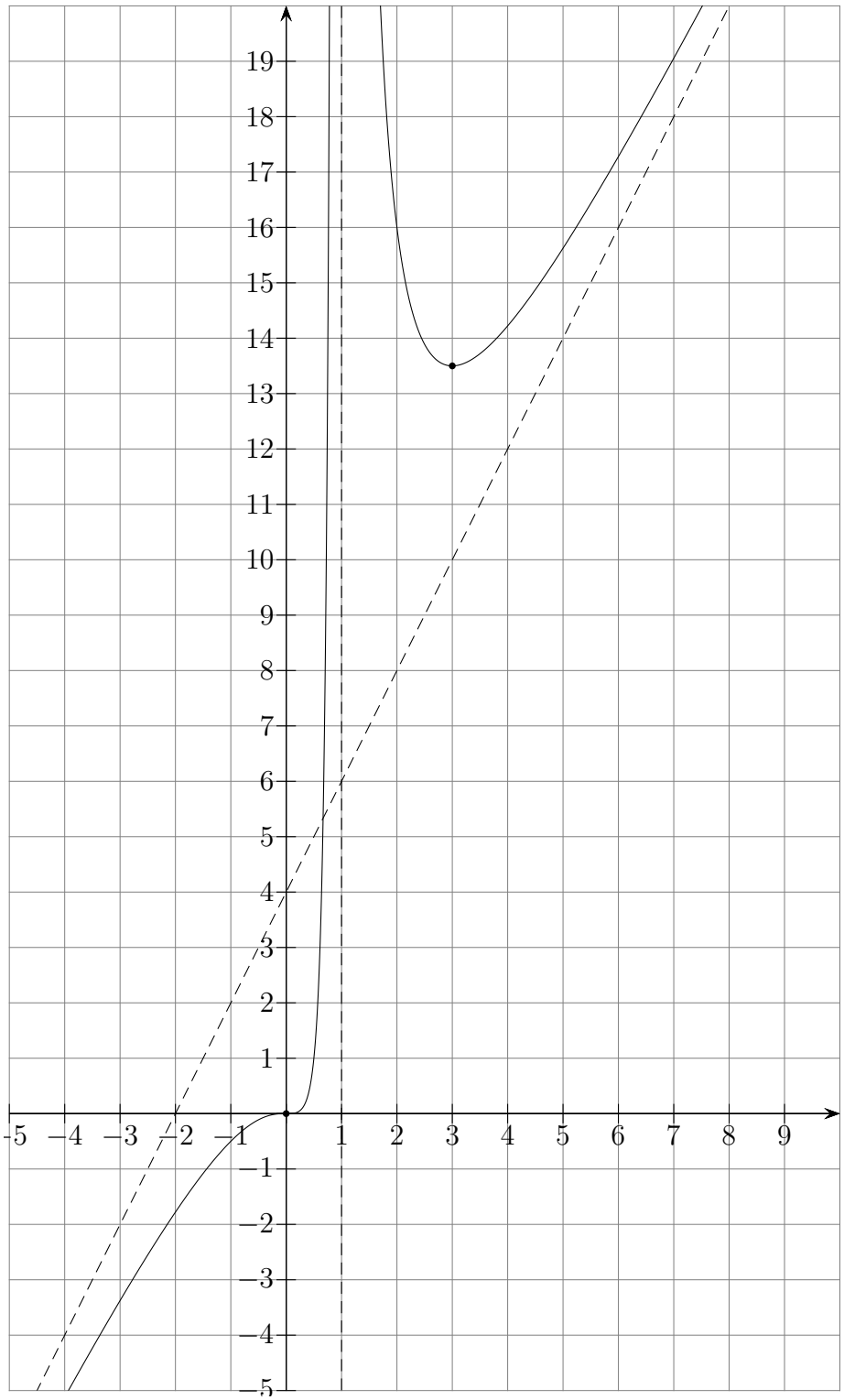
Elle s'annule si $x \in \{0; 3\}$, et f' n'est pas définie en $x = 1$. D'où le signe de f' et la croissance de f :

x		0		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗		↘		↗

On a $f(0) = 0$ et c'est le point $(0; 0)$ est un point à tangente de pente nulle.

On a $f(3) = 13,5$, c'est le point $(3; 13,5)$ est minimum local.

Corrige 2019 3Mr



Corrige 2019 3Mr

Solution 2. (13 points)

Partie A

a) On a $f(x) = x^2(2 - \sqrt{x})$, donc les zéros de f sont 0 et 4.

b) L'aire du domaine vaut

$$\int_0^4 \left(2\,x^2 - x^{2+\frac{1}{2}}\right)\,dx = \frac{2}{3}\,x^3 - \frac{2}{7}\,x^{\frac{7}{2}}\,\Big|_0^4 = \frac{128}{3} - \frac{256}{7} = \frac{128}{21} \cong 6,095$$

Partie B

a) On a $g(4) = 1$ et $h(4) = 1$, donc $(4;1)$ est bien un point d'intersection des graphes.
De même $g(7) = 2$ et $h(7) = 2$ donc $(7;2)$ est le deuxième point.

b) Le volume du solide vaut

$$\pi \int_4^7 \left(\frac{1}{9}(x-1)^2 - \frac{4}{8-x}\right)\,dx = \pi\left(\frac{1}{27}(x-1)^3 + 4\ln(|8-x|)\right)\,\Big|_4^7 =$$

$$= \pi\,(8 - 1 + 0 - 4\ln(4)) = \pi(7 - 4\ln(4)) \cong 4,57$$

Solution 3. (9 points)

a) On résout $e^{2x} = e^{-x}$, donc $3x = 0$ et $x = 0$. Ainsi $(0;1)$.
On a $f'(x) = 2e^{2x}$, $f'(0) = 2$ (donc $(t_f) : y = 2x + 1$) et $g'(x) = -e^{-x}$, $g'(0) = -1$ (donc $(t_g) : y = -x + 1$).
Appelons α l'angle cherché, alors $\tan(\alpha) = \left|\dfrac{2-(-1)}{1-2}\right| = |-3|$, donc $\alpha \cong 71,56°$.

b) On veut que $f'(a) = -\dfrac{1}{g'(a)}$, donc $2e^{2a} = \dfrac{-1}{-e^{-a}}$, donc $e^a = \dfrac{1}{2}$ et ainsi $a = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cong -0,69$.

Solution 4. (10 points)

La contrainte est $x + y = 5$ ou $y = 5 - x$.

Le volume du solide est donné par $\pi \cdot (2x)^2 \cdot y + \dfrac{4}{2 \cdot 3} \cdot \pi \cdot x^3$.

La fonction à optimiser est donc $f(x) = 4\pi x^2(5 - x) + \dfrac{2\pi}{3}\,x^3$, donc $f(x) = \dfrac{\pi}{3}\,(60x^2 - 10x^3)$.

Sa dérivée vaut $f'(x) = \dfrac{10\pi}{3}\,(12x - 3x^2) = \dfrac{10\pi}{3}\,3x(4 - x)$.

La croissance de f est la suivante (il faut que $x \in [0;+\infty[$).

x		0		4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

Le volume est donc maximum lorsque $x = 4$ et $y = 1$.

Solution 6 (15 points)

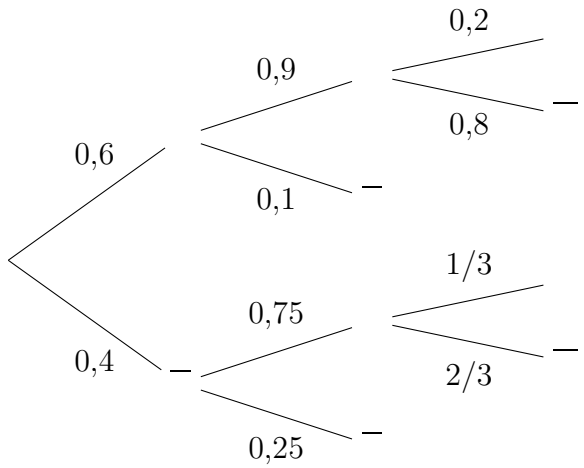
Partie A

a) On a $\binom{10}{3} = 120$.

b) C'est une permutation avec répétition : $\dfrac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$.

Partie B

On note l'événement "la saison a été favorable", : "les légumes ont bien poussés" et : "le voisin est venu chaparder".



c) $\left(\overline{\ }\right) = 0.6 \cdot 0.1 + 0,4 \cdot 0,25 = 16\%$.

d) $(\ \ ) = 0,6 \cdot 0,9 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,75 \cdot \frac{1}{3} = 20,8\%$.

e) $(\ \overline{\ } \mid \overline{\ }\ ) = \dfrac{(\overline{\ } \cap \overline{\ })}{(\overline{\ })} = \dfrac{0,4 \cdot 0,25}{0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,25} = 62,5\%$.

f) $(\ \ ) = 1 - 0,16 = \dfrac{21}{25}$ donc $p = \binom{10}{9} \left(\dfrac{21}{25}\right)^9 \cdot \left(\dfrac{4}{25}\right) + \left(\dfrac{21}{25}\right)^{10} \cong 50,8\%$.

Corrige 2019 3Mr

Solution 5 (11 points)

a) On a $\overrightarrow{n} = \longrightarrow \times \longrightarrow = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, par conséquent $(\alpha) : 2x + y + 4z = 28$.

b) On a $(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

c) Le rayon r de la sphère vaut $r = \delta(\ \ ; \alpha) = \dfrac{|20 - 2 + 52 - 28|}{\sqrt{21}} = \dfrac{42\sqrt{21}}{21} = 2\sqrt{21}$. Donc

$$(\Sigma_1) : (x - 10)^2 + (y + 2)^2 + (z - 13)^2 = 84$$

d) Appelons $_2$ le centre de la sphère et posons $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Alors

$$\longrightarrow_2 = \longrightarrow + \frac{\frac{1}{2}r}{||\overrightarrow{v}||}\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$_2(12; -1; 17)$ et $r_2 = \sqrt{21}$.

Corrige 2019 3Mr

Solution 7. (17 points)

a) On calcule le déterminant de cette matrice

$$\det(\quad_k) = -4k(k+8) + 72 + 72 + 36k - 48 - 12(k+8) = -4k^2 - 8k = -4k(k+2)$$

Donc α_k n'est pas inversible si et seulement si $k \in \{0; -2\}$.

b) Si $k = 0$, la matrice n'est pas inversible. On a

$$\ker(\quad) = \ker\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -2 \\ -18 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le noyau de est composé des vecteurs $(x; y; z)$ avec $2x - y - z = 0$ et $3y + z = 0$. En posant $y = k$, on en tire $z = -3k$ et $x = -k$. Par conséquent, le noyau de possède la base $\{(-1; 1; -3)\}$.

Par le théorème du rang, l'image de est de dimension 2, et elle est engendrée par les colonnes de . On peut choisir $\{(1; 0; 3), (1; -1; 4)\}$ comme base de l'image de .

c) On détermine le polynôme caractéristique de :

$$p(x) = \det\begin{pmatrix} -4-x & 2 & 2 \\ 6 & -x & -2 \\ -18 & 6 & 8-x \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2-x & 2-x & 0 \\ 6 & -x & -2 \\ -18 & 6 & 8-x \end{pmatrix} \begin{matrix} {}_1 + {}_2 \\ {}_2 \\ {}_3 \end{matrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 2-x & 0 \\ 6+x & -x & -2 \\ -24 & 6 & 8-x \end{pmatrix} = -(2-x)((6+x)(8-x) - 48) =$$

$$= (x-2)\left(-x^2 + 2x\right) = -x(x-2)^2$$

où la troisième matrice s'obtient en remplaçant le première colonne par cette colonne moins la deuxième colonne. Les valeurs propres sont donc 0 et 2.

Nous savons déjà que $_0 = \ker(\quad) = \langle(-1; 1; -3)\rangle$.

Calculons

$$_2 = \ker\begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & -2 \\ -18 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $_2$ correspond au plan d'équation $3x - y - z = 0$. En posant $x = k$ et $y = l$, nous avons alors $(x; y; z) = k(1; 0; 3) + l(0; 1; -1)$, donc $_2 = \langle(1; 0; 3), (0; 1; -1)\rangle$.

Par conséquent, $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

d) Si v est un vecteur propre de associé à la valeur propre λ, alors

$$^4 v = \quad ^3 \lambda v = \quad ^2 \lambda^2 v = \quad \lambda^3 v = \lambda^4 v$$

donc v est un vecteur propre de ^{4} associé à la valeur propre λ^4. Par conséquent, les espaces propres de ^{4} sont les mêmes que ceux de mais pour les valeurs propres 0 et 16 respectivement. Plus précisément, $_0 = \langle(-1; 1; -3)\rangle$ et $_{16} = \langle(1; 0; 3), (0; 1; -1)\rangle$.