MATHÉMATIQUES

Matériel autorisé : formulaires officiels non annotés et calculatrices agréées selon liste officielle.

Rédigez complètement les solutions des problèmes proposés ci-dessous.
(Les annotations sur les feuilles d'énoncés sont autorisées, mais ne seront pas prises en considération.)

Problème 1 (20 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3\,x^3 - 3}{3\,x^2 + 1}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition, les zéros et le signe de f.

b) Trouver les équations des asymptotes de f et déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection du graphe de f avec l'asymptote oblique.

c) Montrer que $f'(x) = \dfrac{9\,x\,(x+1)\,(x^2 - x + 2)}{(3\,x^2+1)^2}$, puis étudier la croissance de f et préciser les coordonnées des points qui correspondent aux extremums de f.

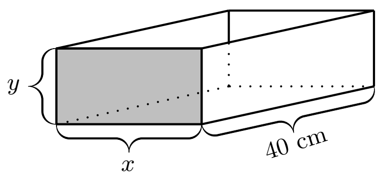
d) Esquisser le graphe de f.

Problème 2 (12 points)

Un ébéniste veut construire un tiroir, dont la profondeur est de 40 cm et le volume est de 10 000 cm^3.

Le devant du tiroir, en grisé sur le schéma ci-contre, coûte 15 centimes le cm^2 et le reste coûte 10 centimes le cm^2.

Quelles doivent être les dimensions inconnues x et y du tiroir pour que le coût de fabrication soit minimal ?



Problème 3 (10 points)

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

A. Soit la fonction f définie par $f(x) = 1 + \sin(2\,x)$.

a) Représenter le graphe de f pour des valeurs de x comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et π.

b) Calculer l'aire de la région bornée limitée par le graphe de f, l'axe des x et les droites $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \pi$.

B. Trouver le volume du solide engendré par la rotation de la région limitée par les courbes

$$y = \sqrt[3]{x+1}\ ; \quad x = 0\ ; \quad x = 7$$

autour de l'axe des x.

Problème 4 (10 points)

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

A. Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(x) - 2\,x$. Déterminer les coordonnées des points du graphe de f où la tangente est horizontale. Préciser si ce point est un maximum ou un minimum.

B. Soit la fonction g définie par $g(x) = e^x(x-2)$. Trouver l'équation de la tangente t à la courbe $y = g(x)$ au point où elle coupe l'axe des x, et calculer l'angle aigu formé par t et l'axe des x.

Problème 5 (17 points)

Soit $\pi : x + y + z = 2$ et $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 16\,x - 14\,y - 16\,z + 150 = 0$.

a) Trouver le centre Ω et le rayon R de la sphère Σ, et vérifier que le plan π ne coupe pas Σ.

b) Former l'équation de la sphère qui est à la fois tangente à Σ et à π et de rayon aussi petit que possible.

c) Écrire l'équation du plan α tangent à Σ au point $\mathrm{A}(3\,;8\,;9)$, et donner les équations des plans tangents à Σ qui sont perpendiculaires à π et α.

Problème 6 (16 points)

Un club de football est composé de 22 joueurs : 5 attaquants, 9 milieux, 6 défenseurs et 2 gardiens.

a) Sans tenir compte des rôles, combien d'équipes différentes de 11 joueurs peut-on former ?

b) Combien y a-t-il d'équipes possibles formées de 2 attaquants, 4 milieux, 4 défenseurs et 1 gardien ?

L'entraîneur établit le tableau suivant qui indique la probabilité de marquer un but contre un gardien donné et pour un type de joueur donné :

	Attaquant	Milieu	Défenseur
Premier gardien	0,4	0,2	0,1
Deuxième gardien	0,9	0,3	0,2

Un gardien est choisi au hasard. Un joueur pris au hasard parmi les attaquants, les milieux et les défenseurs tire au but.

c) Vérifier que la probabilité que le joueur marque vaut 32 %.

d) Calculer la probabilité que le joueur marque s'il est attaquant.

e) Calculer la probabilité que le deuxième gardien ait été choisi, sachant que le joueur a marqué.

f) Le joueur effectue 5 tirs à la suite. Calculer la probabilité qu'il marque au moins quatre fois.

Problème 7 (20 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Préciser le rang de A et dire si A est inversible.

b) Calculer les valeurs propres de A, et justifier que A est diagonalisable.

c) Déterminer une matrice P telle que $P^{-1} A P$ soit une matrice diagonale D (que l'on donnera).

d) Trouver la matrice B définie par $B = A^2 + 2A$.

e) Soit v un vecteur du noyau de B. Prouver que $A v$ est encore un vecteur du noyau de B.